

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

31. Band, Heft 6

13. Oktober 1949

S. 241—288

Geschichte.

• **Archibald, Raymond Clare:** *Outline of the history of mathematics.* Amer. math. Monthly **56**, Nr. 111. H. E. Slaughter Mem. Papers Nr. 2, 114 S. (1949).

Verf. hat seine seit langem geschätzte, exakt belegte Geschichte der Mathematik, in der die Entwicklung bis einschließlich des 18. Jahrhunderts (in Einzelgebieten noch darüber hinaus) behandelt wird, in der vorliegenden 6. Auflage unter Berücksichtigung auch der neuesten Forschungsergebnisse (babylonische Mathematik, Datierung von Diophant usw.) wiederum gründlich überarbeitet und insbesondere Literaturangaben und Anmerkungen stark vermehrt. Der Lehrer für Mathematikgeschichte, für den das Buch besonders wertvoll ist (in USA wurden in den Jahren 1932/34 in 161 Anstalten Kurse und Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten!), gewinnt so eine sichere Grundlage für das weitere Eindringen in den Stoff. Daß in einem Abriß (der vielfach mehr gibt als der Titel „Outline“ besagt) manches nur kurz behandelt werden kann, ist verständlich; vielleicht könnte aber bei der nächsten Auflage im Kapitel „Europäische Mathematik von 1200—1600“ auch Jordanus Nemorarius, Nikolaus Oresme oder Dürer Aufnahme finden.

Kurt Vogel (München).

Miller, G. A.: *Babylonian logarithms.* Math. Student, Madras **15**, 1—3 (1947).

Verf. skizziert drei verschiedene Wege, die zum Begriff des Logarithmus und zu seiner praktischen Verwendung führten: 1. Der ursprüngliche Logarithmusbegriff bei Napier entwickelte sich aus der Vergleichung einer geometrischen mit einer arithmetischen Reihe (Ansätze schon bei Archimedes). — 2. Die klare Erfassung des Log. als 2. Umkehrung des Potenzierens stammt von Euler. Aber schon eine altbabylonische Tafel beantwortet die Frage, in welche Potenz man eine gegebene Zahl erheben muß, damit man eine andere gegebene Zahl erhält. Das Erstaunliche bei dieser wichtigen historischen Entdeckung, die wir O. Neugebauer und A. Sachs verdanken (Mathematical cuneiform texts . . . with a chapter by A. Goetze, Amer. Oriental Series **29**, New Haven, Conn., 1945), ist die Tatsache, daß bereits Bruchexponenten auftreten, z. B. $16^{\frac{1}{2}} = 2$; $16^{\frac{3}{4}} = 8$. — 3. Vor Napier verwendete man die Methode der Prosthaphairesis. Diese hat nun freilich mit Logarithmieren nur insofern etwas zu tun, als man damit ebenfalls Multiplikationen und Divisionen durch Additionen und Subtraktionen ersetzte, und zwar unter Verwendung trigonometrischer Formeln wie $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.

K. Vogel (München).

Babini, José: *Archimède ou la mathématique.* Arch. internat. Hist. Sci., Paris **28**, 66—75 (1948).

Der vorliegende Auszug aus einem angekündigten Werk über Archimedes umfaßt den Abschnitt, in dem der Verf. seine Gedanken über dessen wissenschaftliche Leistung zusammenfaßt. Archimedes wird geschildert als der reine Mathematiker (nicht Techniker), der das Streben nach Einfachheit, Harmonie und Strenge gemeinsam hat mit seinen Vorgängern, über die er weit hinaus kommt, indem er das fortführt, was Euklid unvollendet gelassen hat. Auch auf den andern Gebieten (Astronomie, Physik, Optik) ist ihm der mathematische Inhalt, die Beweisführung das Wesentliche, nicht aber das Experiment oder die technischen Erfindungen selbst, deren Zahl — wie sie Archimedes zugeschrieben werden — für übertrieben

gehalten wird. Verf. glaubt, daß auch die Methodenlehre, deren wissenschaftlicher Charakter dargelegt wird, darin keine Ausnahme macht. Die eingehende Diskussion über die Rolle der von Archimedes neu aufgestellten Postulate sowie über die von ihm nicht behandelten Probleme ist hier noch besonders hervorzuheben.

Kurt Vogel (München).

● **Steck, Max: Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste.** (Mathesis Universalis. Quellenschriften zur Geistesgeschichte der exakten Wissenschaften und der Künste, Bd. 1). Halle a. d. Saale: Max Niemeyer Verlag 1948. XV, 173 S., geb. 15,20 DM.

Im Jahre 1944 fand Verf. in einer Privatsammlung bisher unbekannte Manuskripte Dürers, deren Publikation vorgesehen ist. In obigem Buch wird derjenige Teil, der mit Dürers Werk „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit“ zusammenhängt, verwendet, und wir bekommen eine gehaltreiche Übersicht über Dürers mathematisches Schaffen, das bekanntlich völlig mit seiner Kunst verschmolzen ist. „Underweysung der Messung“ gibt Verf. durch „Lehrgang der Geometrie“ wieder. Das Werk ist mit vielen Bildern, Reproduktionen aus Dürers Werk und aus anderen Quellen, geschmückt. Eine sehr umfangreiche Bibliographie zu Dürer (865 Nummern) kann als eine besonders verdienstliche Beigabe angesehen werden.

Speiser (Basel).

Hofmann, J. E.: Von der Magie der mathematischen Zeichensprache. *Experientia*, Basel 4, 10 S. (1948).

Die kleine Arbeit ist ein Auszug aus einem Vortrag, den Verf. zur Erinnerung an die Erstausgabe der Eulerschen „Introductio in analysin infinitorum“ (1748) im Juni 1948 im Mathematischen Kolloquium der Universität Tübingen gehalten hat. Euler gab in diesem Werk eine Einführung in die höhere Analysis, ohne deren damals noch umstrittene Symbole zu benutzen. Sein Zweck ist also ein vorwiegend methodisch-didaktischer, und er hatte damit großen Erfolg. Der Verf. gibt einen Überblick über den Inhalt der zwei Bücher des Werks, die die Analysis und die analytische Geometrie der Ebene behandeln, und des Anhangs, der einige Kapitel aus der Raumgeometrie bringt. Er geht etwas näher ein auf die Analysis und hebt die fabelhafte algorithmische Kraft, die phantasievollen Ansätze, die mitreißende Gedankenführung und die große Darstellungskunst Eulers hervor. Diesen Vorzügen gegenüber fallen die mangelnde Strenge und die Begrenztheit von Eulers Vorstellungen über die Begriffe der Funktion, der Stetigkeit und des Grenzwerts nicht allzu schwer ins Gewicht. — Einzelne Formelausdrücke auf S. 4 und 9 enthalten Druckfehler, die der Sachkenner leicht berichtigt. *E. Löffler* (Stuttgart).

● **Copernicus, Nicolaus: De revolutionibus, preface and Book I.** Translated by J. F. Dobson with the assistance of S. Brodetsky. London: Royal Astronomical Society 1947. 32 p. 3 s. 6d.

Lenoble, Robert: A propos du tricentenaire de la mort de Mersenne. *Arch. internat. Hist. Sci.*, Paris 28, 583—597 (1948).

Taton, R.: David Eugene Smith (1860—1944). *Arch. internat. Hist. Sci.*, Paris 28, 741—742 (1948).

Cartan, Élie: L'oeuvre scientifique de M. Ernest Vessiot. *Bull. Soc. math. France* 75, 1—8 (1947).

Pelseneer, Jean: Paul Ver Eecke. *Osiris*, Bruges 8, 6—11 (1948).
Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

Philosophie.

Weizsäcker, Carl Friedrich von: Beitrag zur Diskussion über Kausalität. *Studium gen.*, Berlin 2, 126—129 (1949).

Seit 20 Jahren ist die Quantenmechanik eine physikalische Theorie vom Rang der erprobtesten Theorien der klassischen Physik. Es ist eben so anerkannt, daß mit der Quanten-

mechanik eine unerwartete, folgenreiche Krisis der Denkvoraussetzungen der klassischen Physik fest verbunden ist. Dagegen ist der genaue Sinn dieser Krisis noch immer ein heikles Thema für eine pünktliche Beschreibung. Im deutschen Raum ist Pascual Jordan vor anderen mit seiner Darstellung durchgedrungen. Er hat in jedem Fall das Verdienst, das Interesse an diesem Thema auf der Stufe des genauesten Kennertums immer wieder in Kraft gesetzt und durch eigene kühne Spekulationen verstärkt zu haben. Es scheint jedoch, daß eine vorsichtiger Darstellung neben der seinigen erwünscht ist, wenigstens als Komplement. Verf. der vorliegenden kritischen Studie liefert ein solches Komplement. — Jordan hat die Krisis des klassischen Kausalprinzips in den Vordergrund gerückt. Verf. erinnert daran, daß dieses Prinzip für den Physiker zusammenfällt mit der auf individuelle Vorgänge bezogenen Berechenbarkeit ihres zukünftigen Ablaufs auf Grund einer zureichenden Kenntnis der ihnen eingepägten Anfangsbedingungen. Es darf also in keinem Falle verwechselt werden mit dem hiervon ganz unabhängigen Prinzip der Erhaltung der Energie, mit dem es seit Robert Mayer immer wieder einmal identifiziert wird. Die Frage, worin die Krisis des klassischen Kausalprinzips in der Quantenmechanik besteht, darf nicht so beantwortet werden, daß von einem vollständigen Versagen dieses Prinzips in der Quantenmechanik gesprochen wird; denn jede Voraussage der klassischen Physik, die aus einem effektiv durchgeführten Experiment ohne die Adjungierung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen hergeleitet werden kann, ist auch für die Quantenmechanik verbindlich (Persistenz der klassischen Gesetze). Die Krisis wird vielmehr erst dadurch erzeugt, daß trotzdem eine Mannigfaltigkeit von atomaren Erscheinungen existiert (als einfachster Fall die stationären Zustände), die sich mit Hilfe der klassischen Physik auf keine Art erklären lassen. In der Aufklärung dieses Paradoxons liegt die Antwort auf die zusätzliche Frage, worauf die Krisis des klassischen Kausalprinzips in der Quantenmechanik beruht. Es ist bekannt, daß sie darauf beruht, daß die Wechselwirkung zwischen Beobachter und Gegenstand, Meßinstrument und Untersuchungsobjekt, die erforderlich ist, um eine gewisse Zustandsgröße des Gegenstandes zur Erscheinung zu bringen, im atomaren Bereich unverträglich ist mit der Wechselwirkung, die erforderlich sein würde für das Auftreten der komplementären Zustandsgröße, die in nicht-atomaren Bereichen mit dieser zugleich zur Erscheinung kommt. Hieraus ergibt sich unmittelbar die quantenmechanische Unbestimmtheit des jeweiligen Komplementes und im Zusammenhang hiermit der grundsätzliche Verzicht auf eine Beschreibung der atomaren Objekte in der Art eines Systems von Dingen, denen Zustandsgrößen wie Ort und Impuls in irgendeinem Sinne an sich zugeschrieben werden können. Die hierin enthaltene Opferung des nicht nur der Alltagssprache, sondern, in grundsätzlicher Übereinstimmung mit dieser, auch den Redeweisen der klassischen Physik zugrunde liegenden Dingbegriffs ist die Grundforderung, durch die sich die Quantenphysik von der klassischen unterscheidet. Die Krisis des Kausalprinzips ist erst eine Folge dieser wesentlich tiefer liegenden Krisis des Dingbegriffs; denn das Kausalprinzip kann ohne die Voraussetzung des von der Quantenmechanik eliminierten Dingbegriffs nicht einmal formuliert werden. Es ist daher auch nicht zu empfehlen, daß in dem üblich gewordenen Sinne von einer Störung der Beobachtungsobjekte durch den Beobachter gesprochen wird; denn auf eine kaum zu überwindende Art erzeugt das Wort „Störung“ immer wieder den Schein einer ungestörten Existenz an sich. — Verf. geht in dieser kritischen Studie überall auf Bohr zurück und erst recht in den zusätzlichen Bemerkungen zur Biologie und zur Willensfreiheit. Er deutet an, daß durch die allzu drastische Art von Jordan mehreres in Verwirrung geraten ist, was durch ein Zurückgehen auf Bohr revidiert werden sollte.

Heinrich Scholz (Münster).

• **Bavink, Bernhard:** Was ist Wahrheit in den Naturwissenschaften? Wiesbaden: Eberhard Brockhaus Verlag 1947. 88 S.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome:

Wiegmann, N. A.: Normal products of matrices. Duke math. J. 15, 633—638 (1948).

Ist die Matrix A normal ($AA^* = A^*A$), desgleichen B , so ist AB genau dann normal, wenn A mit BB^* vertauschbar ist und B mit AA^* . Aus diesem bemerkenswerten Satz, der auf einem nicht ganz einfachen Wege unter Benutzung der Polardarstellung von Matrizen bewiesen wird, ergibt sich: Sind A, B, AB normal, so auch alle Produkte $X_1^p X_2^q$, wobei man für die X_i nach Belieben A, A^*, B, B^* wählen darf. Eine unitär unzerfällbare Gruppe normaler Matrizen enthält nur skalare Vielfache unitärer Matrizen. — Sind A, B beliebige quadratische Matrizen, so ist

AB genau dann normal, wenn es ein P und ein unitäres U mit $UAP = (A_{\kappa\lambda})$, $P^{-1}BU^* = (B_{\kappa\lambda})$ gibt, wobei A_{11} eine k -reihige Einheitsmatrix, $A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$, B_{11} eine k -reihige Diagonalmatrix, $B_{12} = 0$, B_{21} beliebig und B_{22} eine Diagonalmatrix ist. Wielandt (Mainz).

Tietze, Heinrich: Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobeniusschen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1945/46, 45—56 (1947).

Sind A, B vertauschbare (n, n) -Matrizen, $\varphi(\lambda, \mu) = \det(\mu A - \lambda B)$, so ist $\varphi(A, B) = 0$. Dieser Satz enthält für $B = E$ die Hamilton-Cayleysche Gleichung (und kann auf sie zurückgeführt werden). Er ist andererseits in einem auf mehrere paarweis vertauschbare Matrizen bezüglichen Satz H. B. Phillips enthalten [Amer. J. Math. 41, 266—278 (1919)]. Wielandt (Mainz).

Parker, W. V.: On the characteristic equations of certain matrices. Bull. Amer. math. Soc. 55, 115—116 (1949).

Sind A, B, C_1, C_2 quadratische Matrizen mit $C_1 A = A C_2 = 0$, so haben AB und $A(B + C_1 + C_2)$ dieselbe charakteristische Gleichung. Eine Verallgemeinerung auf rechteckige Matrizen wird angedeutet. Wielandt (Mainz).

Szarski, J. et Ważewski, T.: Sur la relation entre le module d'un déterminant complexe et son déterminant réel, associé. Application à la théorie des formes hermitiennes et à celle des modules des matrices complexes. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 1—6 (1948).

Eine komplexe lineare Transformation A von n Veränderlichen bedeutet eine reelle lineare Transformation B ihrer $2n$ Real- und Imaginärteile. B hat die gleichen charakteristischen Wurzeln wie \bar{A} und A zusammen. Es ist $\det B = |\det A|^2$ (ein entsprechender Zusammenhang besteht zwischen den Gramschen Determinanten, falls A rechteckig ist). Ist A hermitesch, so ist die zugehörige hermitesche Form identisch mit der zu B gehörigen quadratischen Form. Wielandt (Mainz).

Brauer, Alfred: Limits for the characteristic roots of a matrix. III. Duke math. J. 15, 871—877 (1948).

Die Note enthält zwei Ergänzungen zu Teil I und II [Duke math. J. 13, 387—395 (1947); 14, 21—26 (1947); dies. Zbl. 29, 337]. 1. Sind $f_1(x), \dots, f_n(x)$ Polynome, $A = (a_{\kappa\lambda})$ eine (n, n) -Matrix, $f_\nu(A) = (a_{\kappa\lambda}^{(\nu)})$, $\sum_{\lambda \neq \kappa} |a_{\kappa\lambda}^{(\nu)}| = P_\kappa^{(\nu)}$, so genügt jede charakteristische Wurzel ω von A einer der n Ungleichungen $|f_\kappa(\omega) - a_{\kappa\kappa}^{(\kappa)}| \leq P_\kappa^{(\kappa)}$ und einer der $n(n-1)/2$ Ungleichungen $|f_\kappa(\omega) - a_{\kappa\kappa}^{(\kappa)}| |f_\lambda(\omega) - a_{\lambda\lambda}^{(\lambda)}| \leq P_\kappa^{(\kappa)} P_\lambda^{(\lambda)}$. Für numerische Anwendungen empfehlen sich Polynome der Form $f_\nu(x) = x^2 - t_\nu x$. 2. An Stelle der inkorrekten Formulierung des Theorems 6 von Teil I tritt der Satz:

Bildet man für eine nicht zerfallende Matrix A die Größen $\sum |a_{\kappa\lambda}| = R_\kappa$ und $\max R_\kappa = R$, so besitzt A genau dann eine charakteristische Wurzel ω vom Betrage R , wenn $R_1 = \dots = R_n = R$ ist und außerdem für alle $a_{\kappa\lambda} \neq 0$ gilt: $\arg a_{\kappa\lambda} = \varphi + \varphi_\kappa - \varphi_\lambda$ mit passenden reellen Zahlen φ_κ, φ . Es ist dann $\omega = Re^{i\varphi}$. Wielandt.

Taussky, Olga: Bounds for characteristic roots of matrices. Duke math. J. 15, 1043—1044 (1948).

Eine charakteristische Wurzel ω einer zweireihigen Matrix $(a_{\kappa\lambda})$ kann nur dann beiden Kreisen $|\omega - a_{11}| \leq |a_{12}|$, $|\omega - a_{22}| \leq |a_{21}|$ angehören, wenn sie gemeinsamer Randpunkt ist; ist ω außerdem Doppelwurzel, so berühren sich beide Kreise und die Radien sind gleich. — Für nicht zerfallende (n, n) -Matrizen wird der Satz ausgesprochen: Jede charakteristische Wurzel ω genügt entweder einer Ungleichung $|\omega - a_{\kappa\kappa}| < \sum_{\lambda \neq \kappa} |a_{\kappa\lambda}| = P_\kappa$ oder allen n Gleichungen $|\omega - a_{\kappa\kappa}| = P_\kappa$. Der Beweis wird angedeutet. Er kann mit Hilfe des zweiten im vorstehenden Referat genannten Satzes geführt werden. Wielandt (Mainz).

Walker, A. G. and J. D. Weston: Inclusion theorems for the eigenvalues of a normal matrix. *J. London math. Soc.* **24**, 28—31 (1949).

Sei A eine normale Matrix, $x = \{x_v\}$ eine Spalte, $y = Ax = \{y_v\}$. Dann liegt mindestens je eine charakteristische Wurzel von A (1) in jedem Kreis, der alle Quotienten y_v/x_v enthält, (2) in dem Kreis um einen beliebigen Mittelpunkt γ mit dem Radius $\varrho = (|\gamma - m_1|^2 - |m_1|^2 + m_2)^{\frac{1}{2}}$, wobei $m_1 = \sum y_v \bar{x}_v / \sum x_v \bar{x}_v$ und $m_2 = \sum y_v \bar{y}_v / \sum x_v \bar{x}_v$ gesetzt ist. Der Beweis erfolgt durch Hauptachsentransformation; die Sätze lassen sich auf normale Transformationen des Hilbertschen Raumes verallgemeinern. — Die Arbeit berührt sich eng mit der gleichzeitigen Note des Ref.: Ein Einschließungssatz für charakteristische Wurzeln normaler Matrizen [*Arch. Math.*, Oberwolfach **1**, 348—352 (1949)]. Wielandt (Mainz).

Campedelli, Luigi: Una dimostrazione geometrica delle proprietà dell'equazione secolare generalizzata. *Periodico Mat.*, IV. s. **26**, 74—80 (1948).

Es handelt sich um die Gleichung in ϱ , die man erhält, wenn man die Determinante n -ter Ordnung

$$\Delta(\varrho) = |a_{ik} - \varrho b_{ik}|$$

gleich Null setzt, unter den folgenden Voraussetzungen: 1. $\Delta(\varrho)$ ist symmetrisch. 2. Die Elemente a_{ik} und b_{ik} sind reell. 3. Die quadratische Form $\sum b_{ik} x_i x_k$ ist positiv definit, mit anderen Worten: die Quadrik W des S_{n-1} , die man erhält, wenn man diese Form gleich Null setzt, hat keine reellen Punkte. — Verf. gibt einen neuen, auf geometrischen Betrachtungen gegründeten Beweis der Tatsache, daß die Wurzeln von $\Delta(\varrho) = 0$ alle reell sind; alles kommt darauf hinaus, die Realität aller entarteten Quadriken des von W und der Quadrik V mit der Gleichung $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ erzeugten Büschels zu beweisen. — Für $n = 2$ (Involution) und $n = 3$ (Kegelschnittbüschel) läßt sich die Eigenschaft leicht direkt verifizieren. Für $n > 3$ geht der Beweis des Verf. so vor, daß gezeigt wird, daß jede entartete Quadrik des Büschels reelle Punkte enthält und daher reell ist (andernfalls würden die reellen Punkte, die sie enthält, auch zur Konjugierten und daher zu allen Quadriken des Büschels gehören, während W ohne reelle Punkte vorausgesetzt wird). Auf die Homographie, die das Produkt der beiden von V und W bestimmten Polaritäten ist, zurückgehend, stellt Verf. dann die Beziehung her zwischen der Vielfachheit jeder einzelnen Wurzel und dem Rang, den diese der Determinante $\Delta(\varrho)$ erteilt. P. Buzano (Turin).

Shen, D. W. C.: Generalized coordinates in substitutive networks. *Philos. Mag.*, J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. **39**, 890—901 (1948).

Verf. untersucht dreireihige quadratische Matrizen, deren Elemente komplexe Zahlen sind. Matrizen dieser Art treten bei elektrischen Dreiphasennetzen auf; die Elemente sind dort komplexe Widerstände im Sinne der komplexen Schwingungsrechnung. Ist $Z = (z_{ik})$ eine solche dreireihige, quadratische Matrix, $F(\lambda)$ das charakteristische Polynom von Z (es ist vom dritten Grade), und sind die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ desselben (die charakteristischen Zahlen von Z) voneinander verschieden, so gibt es eine nichtsinguläre Matrix A , so daß

$$(1) \quad AZA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ist. Des weiteren gibt es eine Darstellung von Z der folgenden Art:

$$(2) \quad Z = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3.$$

Hierin sind die L_k die zu den Lagrangeschen Polynomen

$$\frac{F(\lambda)}{F'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad (k = 1, 2, 3)$$

gehörigen Matrizenpolynome in Z . — 1. Bei symmetrischen Dreiphasensystemen

besitzt Z die spezielle Form

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Zahlen dieser Matrix sind

$$\lambda_1 = z_0 + z_1 + z_2, \quad \lambda_2 = z_0 + az_1 + a^2z_2, \quad \lambda_3 = z_0 + a^2z_1 + az_2,$$

wobei $a = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Eine Matrix A , welche Z in die Form (1) transformiert, ist

$$(3) \quad A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}.$$

Die inverse von A ist gleich der konjugiert komplexen von A . Die eben beschriebene Transformation ist als Zerlegung in symmetrische Komponenten nach Fortescue bekannt. Die Darstellung (2) von Z lautet hier

$$(4) \quad Z = \frac{\lambda_1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_3}{3} \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind sämtliche z reell, so ist $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$. Wegen $L_3 = \bar{L}_2$ folgt aus (4) die reelle, schon von Blondel und Park angegebene Darstellung

$$Z = \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2z_0 - z_1 - z_2}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{z_1 - z_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Bei den gebräuchlichen Dreiphasennetzen ist meist

$$(5) \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 & z & z \\ z & z_0 & z \\ z & z & z_0 \end{pmatrix}.$$

Bei dieser Matrix fallen zwei der charakteristischen Zahlen zusammen. Es ist $\lambda_1 = z_0 + 2z$, $\lambda_2 = \lambda_3 = z_0 - z$. Die unter 1. angegebene Matrix A führt Z in die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

über. Da sich bei dieser Matrix das Hamilton-Cayleysche Polynom auf eines vom zweiten Grade reduziert, kann (5) durch

$$Z = \frac{z_0 + 2z}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{z_0 - z}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

Quade (Hannover).

Negri, Domenico: Risoluzione di sistemi di 3 equazioni di 2° grado in 3 incognite. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 161—167 (1948).

Im Anschluß an J. Serret (Cours d'algèbre supérieure, 4. Aufl. Paris 1877) bestimmt Verf. die gemeinsamen Lösungen von 3 Gleichungen zweiten Grades in 3 Variablen, also die Schnittpunkte von 3 allgemeinen Quadriken. Diese Aufgabe erfordert die Bestimmung der Resultante von 3 ternären Formen 2. Grades. Trotz den vom Verf. hinzugebrachten Vereinfachungen und Vervollständigungen dürfte diese Methode von Serret nicht einfacher und übersichtlicher sein als die all-

gemeine von F. S. Macaulay [Proc. London math. Soc. 35, 3—27 (1903)] angegebene Bestimmung der Resultante von n Formen in n Variablen; diese Methode wurde vom Ref. in seinem Buch (Moderne algebraische Geometrie, Wien und Innsbruck 1949, S. 60—71) neu dargestellt und auch die obige Resultante explizit angegeben (S. 71).

Gröbner (Innsbruck).

Gruppentheorie:

Choundhury, A. C.: Quasi-groups and nonassociative systems. I. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 183—194 (1948).

Untersuchungen über Systeme mit einer oder zwei Verknüpfungen, für die nur ein Teil der Gruppenaxiome (Ausführbarkeit, Assoziativität, eindeutige Umkehrbarkeit) gelten. Es werden mit Hilfe umkehrbarer Abbildungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ einer Gruppe auf sich selbst solche Systeme durch $a * b = \sigma_1(\sigma_2(a) \sigma_3(b))$ konstruiert.

Lorenzen (Bonn).

MacLane, Saunders: Groups, categories and duality. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 263—267 (1948).

Zwischen gewissen Sätzen der Gruppentheorie besteht bekanntlich eine Dualität, die in vielen Fällen verbandstheoretisch ausgedrückt werden kann. Verf. definiert das direkte Produkt und das freie Produkt von zwei Gruppen abstrakt mit Hilfe von Homomorphismen derart, daß die eine Definition aus der anderen durch Anwendung eines Dualitätsprinzips abgeleitet werden kann. Diese Dualität und andere analoge Dualitäten, die in der Gruppentheorie auftreten, können nach Verf. (axiomatisch) durch Einführung eines neuen Begriffes der verbandsgeordneten Bikategorie erfaßt werden. Dieser Begriff ist eine gemeinsame Verallgemeinerung der Begriffe Gruppe und Verband. Eine Bikategorie wird mit Hilfe des Begriffes Kategorie eingeführt, den Verf. mit Eilenberg in einer anderen Arbeit [Trans. Amer. math. Soc. 58, 231—294 (1945)] erklärt hat. Eine Kategorie ist eine Menge von Elementen, genannt Abbildungen (z. B. Homomorphismen), in welcher das Produkt $\alpha\beta$ für gewisse Paare von Abbildungen α und β erklärt ist und folgende Axiome erfüllt: C_1 (bzw. C'_1): Wenn $\gamma\beta$ und $(\gamma\beta)\alpha$ [bzw. $\beta\alpha$ und $\gamma(\beta\alpha)$] erklärt sind, so auch $\beta\alpha$ (bzw. $\gamma\beta$); C_2 : Wenn $\gamma\beta$ und $\beta\alpha$ erklärt sind, so auch $(\gamma\beta)\alpha$ und $\gamma(\beta\alpha)$, und es gilt $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$. Eine Abbildung ε heißt eine Identität, wenn $\varepsilon\alpha = \alpha$ und $\beta\varepsilon = \beta$ gilt, vorausgesetzt, daß $\varepsilon\alpha$ und $\beta\varepsilon$ erklärt sind; C_3 (bzw. C_4): Zu jedem γ existiert eine Identität ε_D (bzw. ε_R), so daß $\gamma\varepsilon_D$ (bzw. $\varepsilon_R\gamma$) erklärt ist. Daraus folgt die Eindeutigkeit von ε_D (bzw. ε_R). Eine Abbildung θ mit einer zweiseitigen Inversen heißt eine Äquivalenz. Eine Bikategorie ist eine Kategorie, in der die Abbildungen in zwei (dualen) Klassen ausgezeichnet sind: die Injektionen und die Projektionen, die folgende Axiome erfüllen: BC_1 : Jede Identität ist sowohl eine Injektion als auch eine Projektion; BC_2 : Das Produkt von zwei Injektionen (Projektionen), wenn erklärt, ist eine Injektion (Projektion); BC_3 : Jede Abbildung γ ist eindeutig in der Form $\gamma = \varkappa\theta\pi$ darstellbar, wobei π eine Projektion, θ eine Äquivalenz und \varkappa eine Injektion bedeutet; BC_4 : Das Produkt von zwei $\varkappa\theta$ (bzw. $\theta\pi$) ist ein $\varkappa\theta$ (bzw. $\theta\pi$); BC_5 : Zwei Injektionen (Projektionen) mit identischen ε_R und identischen ε_D sind identisch. ε_1 heißt eine Unteridentität (Faktoridentität) von ε_2 , wenn eine Injektion (Projektion) mit $\varepsilon_D = \varepsilon_1$ und $\varepsilon_R = \varepsilon_2$ existiert. Damit werden die Identitäten einer Bikategorie teilweise geordnet. Eine Bikategorie heißt verbandsgeordnet (kurz Vg-Bikategorie), wenn die Unteridentitäten und Faktoridentitäten von jeder Identität bezüglich der obigen teilweisen Ordnung einen Verband bilden. Eine Gruppe kann als eine Vg-Bikategorie mit nur einer Identität erklärt werden. Die Abbildungen einer solchen Bikategorie sind alle Äquivalenzen und bilden die Elemente der Gruppe. Ein Verband kann auch als eine Vg-Kategorie erklärt werden, in welcher alle Abbildungen Injektionen sind. Nach Verf. finden die meisten Erscheinungen der universellen Algebra und

Dualitäten der Gruppentheorie in der Ausdrucksweise der Vg-Bikategorie passende und einfache Formulierungen. *D. A. Kappos* (Erlangen).

Halanay, A.: *La théorie de Galois des extensions séparables infinies et les groupes topologiques.* Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 65—76 (1947).

Anknüpfend an die Tatsache, daß in der Galoischen Gruppe \mathcal{G} eines unendlichen Normalkörpers durch ihre inhaltliche Bedeutung eine „natürliche“ Topologie festgelegt ist, bei der die invarianten Untergruppen von \mathcal{G} von endlichem Index die Umgebungen des Einselementes bilden, untersucht Verf. abstrakte, in der gleichen Weise topologisierte Gruppen. Er zeigt, daß die abgeschlossenen Untergruppen in einfacher Weise mit Hilfe der durch die Umgebungsuntergruppen vermittelten Automorphismen charakterisiert werden können, und beweist die Abgeschlossenheit verschiedener ausgezeichneten Untergruppen (z. B. des Zentrums, der p -Sylowgruppen). Bei einem Teil der Sätze ist nur die eine Voraussetzung wesentlich, daß die Umgebungen des Einselementes invariante Untergruppen sind, nicht aber die andere, daß die Umgebungsuntergruppen endlichen Index besitzen. *Krull.*

Montgomery, Deane: *Dimensions of factor spaces.* Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 373—378 (1948).

Théorème principal: Soient G un groupe topologique séparable métrique, localement compact, de dimension finie n , H un sous-groupe abélien fermé; alors G/H est aussi de dimension finie. La démonstration donne de plus: $\dim(G/H) \leq n(n+1)/2$. Elle s'appuie entre autres sur les propositions suivantes, établies dans le même travail: 1. Si H est un sous-groupe fermé de G , H^* sa composante connexe de l'identité, $\dim(G/H) \geq \dim(G/H^*)$. 2. Si G_x est le normalisateur de $x \in G$, $\dim(G/G_x) \leq \dim G$. 3) Si $H_2 \subset H_1$ sont 2 sous-groupes fermés de G , $\dim(G/H_2) \leq \dim(G/H_1) + \dim(H_1/H_2)$. *A. Borel* (Zürich).

Chevalley, Claude and Samuel Eilenberg: *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras.* Trans Amer. math. Soc. 63, 85—124 (1948).

Les chap. I et II sont principalement consacrés à un exposé de la méthode, due à E. Cartan [Ann. Soc. Polonaise Math. 8, 181—225 (1929)] qui réduit à des problèmes de nature algébrique l'étude de l'homologie des espaces homogènes des groupes de Lie clos. Les auteurs mettent à la base de leurs considérations la notion de q - V -forme différentielle sur une variété M de classe C^2 : c'est une fonction ω^q qui assigne à chaque point m de M une forme q -linéaire alternée, définie sur l'espace tangent à M en m , et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel V sur le corps R des nombres réels et de dimension finie; on définit $d\omega^q$ en prenant les dérivées extérieures des composantes de ω^q . Soit G un groupe de transformations $T_g: M \rightarrow M$ de classe C^2 , $P: g \rightarrow P_g$, une représentation de G dans V ; ω^q est équivariante si $\omega^q T_g = P_g \omega^q$. On montre que les formes équivariantes fermées modulo les formes équivariantes exactes forment un groupe $E^q(M, P)$; si G est clos, $E^q(M, P) = \{0\}$ quand P est irréductible non triviale, par contre, pour $V = R$, $P =$ représentation triviale, $E^q(M, P)$ est, d'après les théorèmes de G. de Rham et de Cartan, isomorphe au q -ième groupe de cohomologie $H^q(M)$ de M (coefficients réels) et $\Sigma E^q(M, P)$ forme, avec le produit extérieur, un anneau isomorphe à l'anneau de cohomologie $H(M)$ de M . — Si $M = G$ est un groupe de Lie, T_g étant la translation: $x \rightarrow gx$ les q - V -formes équivariantes sur G sont en correspondance biunivoque avec les formes q -linéaires alternées sur l'algèbre L de G , à valeurs dans V , et l'application $\omega^q \rightarrow d\omega^q$ se traduit par des transformations $\delta q: C^q(L, V) \rightarrow C^{q+1}(L, V)$, dépendant de la représentation de L induite par P [$C^q(L, V) =$ espace des q - V -formes alternées sur L]. Si $M = G/H$, H connexe, les q - V -formes équivariantes sur M sont en correspondance biunivoque avec les éléments d'un sous-espace $C^q(L, L', V)$ de $C^q(L, V)$, caractérisé algébriquement à l'aide de l'algèbre L' de H , et de P . — Dans les chap. III et IV, on part d'une algèbre de Lie L sur un corps K , d'une représentation P de L dans un espace vectoriel V sur K

de dimension finie, et des transformations $\delta_q; f^q \in C^q(L, V)$ est un cocycle si $\delta_q f^q = 0$, un cobord si $f = \delta_{q-1} f^{q-1}$, les cocycles modulo les cobords forment le „ q -ième groupe de cohomologie $H^q(L, P)$ de L sur P “. De même, on obtient à partir des espaces $C^q(L, L; V)$ les groupes $H^q(L, L', P)$ relatifs à la sous-algèbre L' . Si $V = K$, $P =$ représentation triviale, le produit de Grassmann fait de $\Sigma H^q(L, L', P)$ un anneau $H(L, L')$; si de plus $K = \mathbb{R}$, L et L' étant les algèbres de 2 groupes $G \supset H$ connexes clos, $H(L, L') \cong H(G/H)$. — Les aut. nomment L semi-simple si toutes ses représentations sont totalement réductibles; dans ce cas, et si K est de caractéristique 0, ils montrent par voie algébrique notamment que les q -formes „invariantes“, analogues algébriques des formes différentielles invariantes à droite et à gauche sur un groupe, jouissent des mêmes propriétés que ces dernières, et que $H^1(L, P) = H^2(L, P) = \{0\}$ pour tout P ; réciproquement L est semi-simple si $H^1(L, P) = \{0\}$ pour tout P . Certaines propriétés de $H(L)$ peuvent d'obtenir à partir de théorèmes connus sur les groupes clos („unitary trick“ de Weyl), ainsi les auteurs étendent aux anneaux semi-simples sur K de caractéristique 0 le théorème de Hopf disant que si G est clos $H(G)$ est \cong à l'anneau de cohomologie d'un produit topologique $S_1 \times \dots \times S_m$ de sphères de dimensions impaires, mais je ne vois pas dans quel sens on peut qualifier ce dernier de somme des anneaux $H(S_i)$ (p. 109). — (L^*, Φ) est une extension de L si L est l'image de L^* par l'homomorphisme Φ . Les aut. montrent que l'étude des extensions de L à noyau abélien [$V = \Phi^{-1}(0)$ abélien] se ramène à celle des groupes $H^2(L, P)$ et déduisent le théorème de Lévi du fait que $H^2(L, P)$ est toujours nul pour L semi-simple. Enfin les extensions centrales (V dans le centre de L^*) sont aussi étudiées. A. Borel (Zürich).

Kar, S. C.: Zur Analyse der Lorentzgruppe in algebraischer Darstellung. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 163—172 (1948).

L'A. donne une démonstration nouvelle du théorème d'Einstein-Mayer [S.-B. Preuß. Akad. Wiss. 32/33, 522—550 (1932); ce Zbl. 6, 229] sur la décomposition du groupe de Lorentz en deux sous-groupes permutables conjugués l'un de l'autre. Le principal résultat de ce papier est le suivant: la matrice d'une transformation de Lorentz arbitraire peut être mis sous la forme

$$(d - a\tau_x - b\tau_y - c\tau_z) (\bar{d} - \bar{a}\bar{\tau}_x - \bar{b}\bar{\tau}_y - \bar{c}\bar{\tau}_z)$$

où τ_x, τ_y, τ_z désignent trois matrices complexes fixes et où $|d^2 - a^2 - b^2 - c^2| = 1$. Ce résultat est établi à partir d'une étude algébrique des transformations infinitésimales du groupe de Lorentz. Une représentation du groupe de Lorentz qui fait intervenir les matrices de Pauli s'en déduit. Lichnerowicz (Strasbourg).

Belova, E. N., N. V. Belov und A. V. Šubnikov: Über die Zahl und die Struktur der abstrakten Gruppen, die den 32 Kristallklassen entsprechen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 63, 669—672 (1948) [Russisch].

Die Frage, wie viele vom Standpunkt der abstrakten Gruppentheorie verschiedene Raumgruppen existieren, wurde 1934 gleichzeitig und unabhängig von B. N. Delone, N. N. Padurov und A. D. Aleksandrov in ihrem Buche „Mathematische Grundlagen der Strukturanalyse von Kristallen“ und vom Referenten in einer Arbeit über euklidische Raumformen [Comment. math. Helvetici 7, 81—93 (1934); dies. Zbl. 10, 376] gestellt und deren Zahl als 219 (im Gegensatz zu den 230 kristallographisch verschiedenen) angegeben. Dies ist eine Folgerung des Satzes von L. Bieberbach [Math. Ann., Berlin 72, 400 (1912)], demzufolge isomorphe Raumgruppen mit endlichem Fundamentalbereich affin verwandt sind, und der Tatsache, daß 11 Raumgruppen in spiegelbildlichen (enantiomorphen) Formen auftreten ($230 - 11 = 219$). — In der vorliegenden Arbeit wird dieselbe Frage für die 32 kristallographischen Punktgruppen (Kristallklassen) gelöst, indem sie 18 abstrakten Gruppen entsprechen. Zehn abstrakte Gruppen haben nur je einen kristallographischen Vertreter; acht dagegen entsprechen 2 bis 4. Die fun-

damentale Ursache, derzufolge mehrere kristallographische Gruppen in eine einzige abstrakte vereinigt werden, liegt in der Gruppenidentität der geradzähligen Dreh-, Drehspiegel- und Drehinversionsachsen. In einer Tabelle sind die Gruppen mit den Operationen zusammengestellt; z. B. sind die Kristallklassen $C_2 - 2$, $C_s - m$ und $C_i - \bar{1}$ isomorph, denn ihre Operationen sind:

$$C_2: 1, L_2;$$

$$C_s: 1, P(= \bar{L}_2);$$

$$C_i: 1, C(= \bar{L}_2)$$

($L_n = n$ -zählige Dreh-, $\bar{L}_n =$ Drehinversions-, $\bar{L}_n =$ Drehspiegelachse). [Nach deutscher Übersetzung referiert.] W. Nowacki (Bern).

Verbände. Ringe:

Grau, A. A.: Ternary Boolean algebra. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 567—572 (1947).

In einer Booleschen Algebra (B. A.) mit den Verknüpfungen $a \wedge b$, $a \vee b$ und dem Komplement a' gelten für die Operation 1. $a^b c = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$ I. $a^b (c^a e) = (a^b c)^a (a^b e)$; II. $a^b b = b^b a = b$; III. $a^b b' = b'^b a = a$. Durch I.—III. definiert Verf. „ternäre B. A.“. Für jedes Element p einer ternären B. A. ist diese eine B. A. bezüglich der Verknüpfungen 2.1. $a \wedge b = a^p b$, 2.2. $a \vee b = a^{p'} b$. Diese B. A. sind für alle p einander isomorph, so daß eine bis auf Isomorphie eindeutige Zuordnung zwischen allen ternären B. A. und allen B. A. durch 1. und 2. hergestellt ist.

Lorenzen (Bonn).

Birkhoff, Garrett and S. A. Kiss: A ternary operation in distributive lattices. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 749—752 (1947).

Während eine Boolesche Algebra B^n nur $n!$ Verbandsautomorphismen hat, hat der Graph von B^n (ein n -dimensionaler Würfel) $2^n \cdot n!$ Automorphismen. Dies sind die Automorphismen von B^n bezüglich der ternären Operation $(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$. Wie in der Arbeit von A. A. Grau (vorsteh. Referat) wird bewiesen, daß distributive Verbände durch diese Operation definiert werden können.

Lorenzen (Bonn).

Diamond, A. H. and J. C. C. McKinsey: Algebras and their subalgebras. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 959—962 (1947).

Während jede Algebra, deren aus 3 Elementen erzeugte Unteralgebren Boolesch sind, selbst Boolesch ist, wird durch ein Beispiel gezeigt, daß es nicht-Boolesche Algebren gibt, deren aus 2 Elementen erzeugte Unteralgebren Boolesch sind. Jedes Axiomensystem für Boolesche Algebren, das aus Identitäten besteht, muß daher mindestens eine Identität mit mehr als 2 Variablen enthalten. Dies gilt auch für die Axiomensysteme anderer Algebren und Aussagenlogiken.

Lorenzen (Bonn).

Foster, Alfred L.: The n -ality theory of rings. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 31—38 (1949).

Eine Menge R bilde mit den Verknüpfungen $+$, \times einen Ring $(R, +, \times)$ mit Einselement 1. K sei eine Gruppe von Permutationen der Menge R . Aus $\varrho \in K$ ergeben sich die Verknüpfungen $a +_{\varrho} b = \varrho^{-1}(\varrho(a) + \varrho(b))$, $a \times_{\varrho} b = \varrho^{-1}(\varrho(a) \times \varrho(b))$. Die algebraische Struktur, welche durch die Menge R zusammen mit den $\varrho \in K$ und den Verknüpfungen \times_{ϱ} gebildet wird, heißt die „ K -Logik“ des Ringes. Folgende Eigenschaften des Ringes werden eingeführt: „ K -logisch definierbar“, wenn $+$ mittels der ϱ und \times_{ϱ} beschrieben werden kann; „ K -logisch gleichungsmäßig definierbar“, wenn $+$ durch die Zeichen ϱ , \times_{ϱ} ausgedrückt werden kann; „ K -logisch fest“, wenn K -logisch definierbar, aber kein Ring $(R, +_1, \times)$ mit einer von $+$ verschiedenen Addition $+_1$ K -logisch definierbar. Der Ring heißt „Ring-Logik (K)“, wenn er sowohl K -logisch fest wie gleichungsmäßig definierbar ist. Nimmt man für K die von der Permutation $x \rightarrow 1 - x$ erzeugte Gruppe C , so gilt Satz I: Ein Boolescher Ring ist eine Ring-Logik (C); ein Boolesch-ähnlicher

Ring [Definition s. Verf., Trans. Amer. math. Soc. **59**, 166—187 (1946)] ist C -logisch definierbar, aber i. a. nicht C -logisch fest; ein Körper ist C -logisch fest, aber i. a. keine Ring-Logik (C). Insbesondere werden zu einer Primzahl p die „ p -Ringe“ betrachtet, für welche $a^p = a$ und $pa = 0$ gilt. Für K wird die von der Permutation $x \rightarrow 1 + x$ erzeugte Gruppe N genommen. Anwendung der Elemente von N gibt ein „ p -alitäts Theorem“ (Permutation der Verknüpfungen $+_e$ sowohl wie der \times_e). Satz V: Jeder 3-Ring ist eine Ring-Logik (N). Beweise der Sätze werden nicht gegeben. Problem: Gibt es zu jedem Ring mit Einselement eine Gruppe K so, daß der Ring eine Ring-Logik (K) ist? *G. Pickert* (Tübingen).

Smiley, Malcolm F.: Alternative regular rings without nilpotent elements. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 775—778 (1947).

Ein Ring R wird alternativ und regulär genannt, wenn für jedes $a, b, c \in R$ der Ausdruck $(a, b, c) = a(bc) - (ab)c$ bei Vertauschung je zweier Argumente sein Vorzeichen wechselt und wenn es zu jedem $a \in R$ ein $x \in R$ mit $axa = a$ gibt. Verf. gibt das folgende Theorem über diese Ringe: Dann und nur dann ist ein alternativer regulärer Ring R eine direkte Summe von alternativen Divisionsringen, wenn R keine nilpotenten Elemente enthält. Zum Beweis wird ein ähnlicher Satz von A. Forsythe und N. H. McCoy [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 523—526 (1946)] über assoziative Ringe und ein Theorem von Artin [M. Zorn, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **8**, 123—147 (1931), Satz 4;] herangezogen. Als Anwendung wird der Satz bewiesen: Jeder alternative Ring R , für den es zu jedem $a \in R$ eine ganze Zahl $n(a) > 1$ mit $a^{n(a)} = a$ gibt, ist assoziativ. *Gg. Reichel* (Tübingen).

Fuchs, L.: A condition under which an irreducible ideal is primary. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **19**, 235—237 (1948).

Definiert man in einem beliebigen kommutativen Ring \mathfrak{R} eine Hauptquotientenkette $\alpha \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \subseteq \alpha_n \subseteq \alpha_{n+1} \subseteq \dots$ derart, daß mit einem beliebigen, aber für diese Kette festen Hauptideal (b) jeweils $\alpha_n = \alpha_{n-1} : (b) = \alpha : (b^n)$ ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Primäridealeigenschaft eines in \mathfrak{R} irreduziblen Ideals \mathfrak{q} darin, daß alle mit \mathfrak{q} beginnenden Hauptquotientenkettensätze im Endlichen abbrechen. Gilt für die Ideale aus \mathfrak{R} der Teilerkettensatz oder der eingeschränkte Vielfachenkettensatz modulo den vom Nullideal verschiedenen Idealen, so ist die Endlichkeit aller Hauptquotientenkettensätze gesichert. *Grell* (Berlin).

Arens, Richard: Linear topological division algebras. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 623—630 (1947).

Eine konvexe topologische Algebra ist ein reeller, linearer, konvexer topologischer Raum, in dem eine stetige Multiplikation erklärt ist. Ist überdies eine skalare Multiplikation mit komplexen Zahlen erklärt, so heißt die Algebra komplex, enthält sie 1 und ist jedes $x \neq 0$ invertierbar, so heißt sie Divisionsalgebra. Es gilt: Jede komplexe, konvexe topologische Divisionsalgebra, in der die Inversenbildung stetig ist, ist entweder gleich dem Körper R der reellen oder K der komplexen Zahlen. Läßt man die Voraussetzung „komplex“ weg, so kann auch noch der Quaternionenkörper Q auftreten. Folgerungen: R , K oder Q ergeben sich auch unter jeder der folgenden Voraussetzungen: a) A sei eine normierte Divisionsalgebra mit $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ [Satz von Mazur, C. r. Acad. Sci., Paris **207**, 1025—1027 (1938); dies. Zbl. **20**, 201], b) A sei eine konvexe separable, metrische und vollständige Divisionsalgebra, c) A sei eine normierte Algebra, und es gebe ein festes k mit $k\|x\| \cdot \|y\| \leq \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Ferner wird bewiesen: Ist A ein Ring, dessen Elemente bei der Addition eine metrisierbare, vollständige topologische Gruppe bilden, in dem die Multiplikation in jeder Variablen für sich stetig ist, so ist sie in beiden Variablen gleichzeitig stetig. Nicht immer bilden die nichtsingulären Elemente eines solchen Ringes A eine topologische Gruppe bezüglich der Multiplikation.

G. Köthe (Mainz).

Zahlentheorie:

Gloden, A.: Sur la multigrade $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \stackrel{k}{=} B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ ($k = 1, 3, 5, 7$). Euclides, Madrid 8, 383—384 (1948).

Arnold, B. H. and Howard Eves: A simple proof that, for odd $p > 1$, arc cos $1/p$ and π are incommensurable. Amer. math. Monthly 56, 20—21 (1949).

Klee jr., V. L.: On a problem of Erdős. Amer. math. Monthly 56, 21—22 (1949).

Moser, Leo: Some equations involving Euler's totient function. Amer. math. Monthly 56, 22—23 (1949).

Clement, P. A.: Congruences for sets of primes. Amer. math. Monthly 56, 23—25 (1949).

Ogilvy, C. S.: Geometry of the square root of three. Amer. math. Monthly 56, 172—174 (1949).

Thébault, Victor: Consecutive cubes with difference a square. Amer. math. Monthly 56, 174—175 (1949).

Rohrbach, Hans: Die Anzahl der Zahlen mit vorgegebener Quersumme. Math. Nachr., Berlin 1, 357—364 (1948).

Verf. bezeichnet mit $A_{n,q}^{(g)}$ die Anzahl der Zahlen N mit $0 \leq N < g^n$, die im Zahlssystem mit der Basis $g \geq 2$ die Quersumme q haben. Er zeigt

$$A_{n,q}^{(g)} = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{n}{v} \binom{q - gv + n - 1}{n - 1}.$$

Die Summe enthält nur endlich viele nichtverschwindende Glieder. Für $g = 10$ ist die Formel bekannt [C. Schmieden, Über eine Aufgabe aus der Kombinatorik, Z. math. naturw. Unterr. 70, 154—156 (1939)]. Der Beweis kann sowohl induktiv mit Benutzung einer Rekursionsformel als auch mittels einer erzeugenden Funktion geführt werden. $g^{-n} A_{n,q}^{(g)}$ läßt sich als die Wahrscheinlichkeit deuten, mit der $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ den Wert q annimmt, wobei x_1, x_2, \dots, x_n Zufallsvariable sind, die unabhängig je die Werte $0, 1, \dots, g - 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Verf. drückt ferner die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq x$ mit der Quersumme q durch eine Summe von Ausdrücken $A_{r,k}^{(10)}$ aus. Für $n \rightarrow \infty$ strebt $A_{n,q}^{(g)}$ gegen eine Gaußsche Verteilung:

$$g^{-n} A_{n,q}^{(g)} \approx \left\{ \frac{1}{6} (g^2 - 1) n \pi \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{6 \left[q - \frac{1}{2} (g - 1) n \right]^2}{(g^2 - 1) n} \right\}.$$

Für einige in der Arbeit auftretende unbequeme Summen ergeben sich damit Näherungsformeln. Verf. macht eine Anwendung, die zweckmäßige Auswahl von Codegruppen für einen Zahlencode betreffend. Stöhr (Hamburg).

Mirsky, L.: Arithmetical pattern problems relating to divisibility by r th powers. Proc. London math. Soc., II. s. 50, 497—508 (1949).

Es sei r eine ganze Zahl ≥ 2 . Eine natürliche Zahl heißt eine r -Zahl, wenn sie durch die r -te Potenz einer Primzahl teilbar ist, sonst r -frei. Es seien nun $a_1, \dots, a_l; b_1, \dots, b_m$ verschiedene natürliche Zahlen. Es sei $H(x) = H_r(x; a_1, \dots, a_l; b_1, \dots, b_m)$ die Anzahl der Systeme natürlicher Zahlen $n + a_1, \dots, n + a_l; n + b_1, \dots, n + b_m \leq x$, so daß die ersten l Zahlen r -frei sind, während dies die anderen nicht sind. Für $r = 2, m = 0$ wurde dieses Problem von Pillai [J. Indian math. Soc., II. s. 2, 116—118 (1936); dies. Zbl. 15, 196] betrachtet. Verf. zeigt nun

$$(1) \quad H(x) = h x + O(x^\alpha) \quad (x \rightarrow \infty),$$

wo $\alpha = (l + m)/(r + l + m - 1) + \varepsilon$. Dabei ist $h = h_r \geq 0$, und zwar ist genauer: $H(x) = 0$, wenn es eine Primzahl p gibt, so daß $D(p^r | a_1, \dots, a_2) = p^r$.

Sonst gilt (1) mit

$$h = h_r(a_1, \dots, a_l; b_1, \dots, b_m) \\ = \sum_{k=0}^m (-1)^k \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq m} \prod_p \left\{ 1 - \frac{D(p^{r_1} a_1, \dots, a_l, b_{r_1}, \dots, b_{r_k})}{p^r} \right\}$$

und $h > 0$. Dabei ist $D(t|n_1, \dots, n_s)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen n , für die $1 \leq n \leq t$, $n \not\equiv n_i \pmod{t}$ ($1 \leq i \leq s$). — Verf. kündigt eine Verschärfung von (1) an und verweist dazu auf seine Arbeit „Note on an asymptotic formula connected with r -free integers“, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 18, 178—182 (1947).

Hlawka (Wien).

Tietze, Heinrich: Eine Bemerkung zum Lehmerschen Problem. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1944, 163—170 (1947).

Verf. stellt folgendes Problem: Es sei $A_g(n)$ die Anzahl der Teiler von n , die durch keine Potenz p^{g+1} einer Primzahl p teilbar sind, $A_0(n) = 1$ (nach Mirsky kurz die Teiler, welche $g+1$ -frei sind; vgl. z. B. vorsteh. Referat). Es sei nun weiter \mathfrak{S} das folgende System natürlicher Zahlen: b_1, \dots, b_k seien k verschiedene Restklassen, welche zu m teilerfremd sind ($1 \leq k \leq h = \varphi(m)$), dann ist \mathfrak{S} das System aller Zahlen n , für die jeder Primfaktor von n einer dieser Restklassen angehört. Es soll nun das asymptotische Verhalten von $S_g(x) = \sum_{n \in \mathfrak{S}} A_g(n)$ untersucht werden.

Für $g = 1$ wurde dieses Problem von Lehmer gestellt [Amer. J. Math. 22, 293—335 (1900)]. Von Landau wurde dieses Problem für $g = 0$ und 1 gelöst [vgl. z. B. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, Leipzig und Berlin 1909, S. 649—668; Amer. J. Math. 31, 86—102 (1909)]. Verf. führt das Problem auf die Abschätzung von $\log F(s)$ zurück, wo

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_g(n)}{n^s} \quad (n \text{ aus } \mathfrak{S}) \text{ ist.} \quad \text{Hlawka (Wien).}$$

Davenport, H.: A divisor problem. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 37—44 (1949).

Es sei $\varrho(x) = \sum_{m \leq x} \frac{1}{m} \left\{ \frac{x}{m} \right\}$, wo $\{u\} = u - [u] - \frac{1}{2}$ und $[u]$ die größte ganze Zahl $\leq u$ bedeutet. Verf. beweist $\varrho(x) = O((\log x)^{4/5+\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$. In einer später zugefügten Bemerkung sagt Verf., daß dieses Resultat schon früher von A. Walfisz [Trav. Inst. Math. Tbilissi 5, 181—195 (1938); dies. Zbl. 20, 204] bewiesen wurde. Es wird die Vermutung von Walfisz ausgesprochen, daß auch $\varrho(x) = O((\log x)^{2/3+\varepsilon})$ gültig ist. A. Rényi (Budapest).

Wintner, Aurel: A note on Merten's hypothesis. Rev. Ci., Lima 50, 181—184 (1948).

Aus der Mertensschen Hypothese $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^{1/2})$ folgt $\sum_{n \leq x} \mu(n)/n^{1/2} = O(1)$, während für beliebiges $f(n)$ an Stelle von $\mu(n)$ nur auf $O(\log x)$ geschlossen werden kann. Ein Fatou-Rießcher Satz über Dirichletreihen, angewandt auf $\sum \mu(n) n^{1/2}/n^s$, ergibt wegen $\zeta(\frac{1}{2}) \neq 0$ das Resultat. Hoheisel (Köln).

Shah, S. M. und U. C. Sharma: Some properties of a function of Ramanujan. J. Univ. Bombay, II. s. 17, Nr. 3, 1—4 (1948).

Es sei $0 \leq w \leq 1$, $t \geq 1$ und $we^{-w} = te^{-t}$. Dann ist $\Phi(t) = w/t$ ($t \geq 1$) die betrachtete Funktion. Es wird nun gezeigt: $(-1)^r \Phi^{(r)}(t) \geq 0$ für $t \geq 1$ und $r = 1, 2, 3, 4$. Bis $r = 3$ wurde dies bereits von Chowla und Auluck [J. Indian Math. Soc. 4, 169—173 (1946)] gezeigt. Hlawka (Wien).

Mirsky, L.: Note on a theorem of Carlitz. Duke math. J. 15, 803—815 (1948).

Verf. beweist, in Verallgemeinerung und Verschärfung eines Satzes von Carlitz [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 2, 97—106 (1931) und 3, 273—290 (1932); dies. Zbl. 2, 14; 6, 104] folgenden Satz: Es sei $s \geq 2$, F_1, \dots, F_s vorge-

gebene arithmetische Funktionen,

$$f_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F_k(n/d) \quad (1 \leq k \leq s),$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ nicht negative Zahlen und

$$Q(n) = \sum_{n_1 + \dots + n_s = n} n_1^{\alpha_1} \dots n_s^{\alpha_s} F_1(n_1) \dots F_s(n_s),$$

$$S(n) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) | n} \frac{f_1(\alpha_1) \dots f_s(\alpha_s)}{a_1 \dots a_s} (a_1 - a_s).$$

Sind dann F_1, \dots, F_s „ M -Funktionen“, d. h. $F(1) = 1$, $F(n) = O(n^\varepsilon)$ ($\varepsilon \geq 0$, bel.), $F(p) = 1 + O(p^{-\sigma + \varepsilon})$ für alle p (p Primzahl, $\sigma > 0$), $|f(mn)| \leq |f(m)f(n)|$ [$(m, n) = 1$], dann ist S absolut konvergent und

$$Q = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_s + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_s + s)} S n^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s + s - 1} + O(n^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s + s - 2 + t + \varepsilon}),$$

wo $t = s\theta/(s - 1 + \theta)$, $\theta = \max(\frac{1}{2}, 1 - \sigma)$. Die O -Konstante hängt von $\sigma, s; F, \alpha, \varepsilon$ ab. Es werden noch verwandte Sätze abgeleitet und angewendet auf das Problem von Evelyn-Linfoot und Page [vgl. z. B. Page, J. London math. Soc. 7, 24–27 (1932); dies. Zbl. 3, 340] und auf die Jordansche Verallgemeinerung der Eulerschen Funktion. Hlawka (Wien).

Bellman, Richard and Harold N. Shapiro: On a problem in additive number theory. Ann. Math., Princeton, II s. 49, 333–340 (1948).

Verff. befassen sich mit folgender zahlentheoretischer Funktion: Es werde jede natürliche Zahl n dargestellt als $\sum_i 2^{k_i}$ ($k_{i+1} > k_i$). Dann ist $\alpha(n) =$ Anzahl der verschiedenen Potenzen von 2 in dieser Darstellung und $\alpha(0) = 1$. Es ist

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + ax^{2^k}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\alpha(n)} x^n.$$

$\alpha(n)$ ist dyadisch additiv, d. h. $\alpha(m + n) = \alpha(m) + \alpha(n)$, wenn n und m in der oben betrachteten Darstellung keinen Summanden gemeinsam haben. Es werden nun die Summen $A_r(x) = \sum_{n \leq x} \alpha_r(n)$ [$\alpha_r(n) = \alpha(\alpha_{r-1}(n))$, $\alpha_0(n) = n$] untersucht.

Insbesondere wird gezeigt: $A_i(x) = \frac{x \log x}{2 \log 2} + O(x \log \log x)$ für $x \rightarrow \infty$,

$\sum_{n \leq x} \frac{A_2(2^n)}{2^n} \sim \frac{x \log x}{2 \log 2}$. Dagegen ist, im Gegensatz zu A_1 , $A_r(x)$ für $r \geq 2$ nicht asymptotisch gleich $\frac{x \log_n x}{2 \log 2}$ und auch nicht asymptotisch zu irgendeiner elementaren Funktion. Hlawka (Wien).

Erdős, P. and P. Turán: On a problem in the theory of uniform distribution. I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1146–1154 (1948).

Verff. formulieren folgenden Satz: Liegen alle Nullstellen z_v des Polynoms $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ außerhalb $|z| < 1$ und ist, für ein festes ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ auf $|z| = \vartheta$, $|f(z)| \leq M_\vartheta$, dann gilt, wenn $\frac{M_\vartheta}{\sqrt{|a_0 a_n|}} = e^{n/g(n, \vartheta)}$ gesetzt wird [$n \geq g(n, \vartheta) \geq 2$], für alle $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$

$$(1) \quad \left| \sum_{\alpha \leq \arg z_v \leq \beta \bmod 2\pi} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \right| < C \log \frac{4}{\vartheta} \frac{n}{\log g(n, \vartheta)}.$$

Beim Beweis soll folgende „endliche“ Form des Gleichverteilungssatzes von H. Weyl verwendet werden. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ reell und $|s_k| = \left| \sum_{r=1}^n e^{k i \varphi_r} \right| \leq \varphi(k)$ ($k = 1, \dots, m$), $m = m(n) \geq 1$, dann gilt für jedes $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$

$$\left| \sum_{\alpha \leq \varphi_v \leq \beta \bmod 2\pi} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \right| < C \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{\varphi(k)}{k} \right).$$

In dieser Note werden die beiden Sätze diskutiert und gezeigt, daß sich die Abschätzung in (1) in bezug auf n nicht weiter verbessern läßt. Weiter wird der Beweis des ersten Satzes vorbereitet, in dem gezeigt wird, daß man ihn auf den Fall zurückführen kann, wo alle z_p auf $|z| = 1$ liegen. *Hlawka (Wien).*

Fomin, A. M.: Über eine Klasse nichtlinearer diophantischer Approximationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 63, 7—10 (1948) [Russisch].

Ein allgemeiner Satz bezüglich nichtlinearer diophantischer Approximationen wird angekündigt, durch dessen Anwendung ein Satz von R. O. Kuzmin [Doklady Akad. Nauk SSSR 1933, 9—17; dies. Zbl. 8, 243] verallgemeinert und folgender allgemeiner Satz bewiesen wird: Es sei $f(x)$ eine positive, monoton gegen ∞ wachsende Funktion, für welche $f''(x)$ monoton gegen 0 konvergiert und $xf''(x)$ nicht abnimmt, ferner sei $f(x) = O(x^c)$ mit $c < 2$; dann kann jede genügend große positive Zahl N in der Form

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_r) + d$$

dargestellt werden, wo x_1, x_2, \dots, x_r ganze Zahlen sind, r eine nur von $f(x)$ abhängende ganze Zahl bedeutet und d für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Als spezieller Fall folgt der folgende Satz: Es sei c eine reelle Zahl, $1 < c < 2$, und wir wählen eine ganze Zahl $r \geq 2 + \frac{\log 1/(2-c)}{\log 2}$. Jede genügend große positive Zahl N kann in der Form

$$N = x_1^c + x_2^c + \dots + x_r^c + d$$

mit ganzen x_i dargestellt werden, wo d für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Dieser Satz war für $c < \frac{3}{2}$ in einer schärferen Form, mit $r = 2$, von B. I. Segal [Doklady Akad. Nauk SSSR 1933, 95—99; dies. Zbl. 8, 244] bewiesen worden, aber für $2 - 1/2^{10} > c \geq \frac{3}{2}$ ist obiger Satz schärfer als das entsprechende Resultat von Segal [s. Ann. Math., Princeton, II. s. 36, 507—520 (1935); dies. Zbl. 12, 196].

A. Rényi (Budapest).

Chincin, A. Ja.: Über einige Anwendungen der Methode der zusätzlichen Veränderlichen. Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 6, 188—200 (1948) [Russisch].

Verf. zeigt, daß die Methode der zusätzlichen Veränderlichen, welche zuerst von L. J. Mordell [J. London math. Soc. 12, 34—36; 166—167 (1937); dies. Zbl. 15, 390, 16, 392] in die Theorie der diophantischen Approximationen eingeführt, aber nur zur Lösung nichthomogener Aufgaben angewandt wurde, zum Beweis von sogenannten Übertragungssätzen, d. h. Sätzen bezüglich des Zusammenhanges zwischen der Lösbarkeit eines Systems von linearen Ungleichungen und der des transponierten Systems, sich vorzüglich eignet. Nachdem Verf. in einer früheren Arbeit [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 217—218 (1948)] diese Methode verallgemeinert und zum Beweis eines neuen Satzes bezüglich homogener singulärer Systeme angewandt hat, wendet er jetzt dieselbe Methode zur Gewinnung neuer Beweise bzw. Verschärfungen von drei bekannten Sätzen an: 1. Ein Satz von K. Mahler [Časopis mat. fys. 68, 85—92 (1939); dies. Zbl. 21, 104] wird, von einer überflüssigen Voraussetzung befreit, in folgender Form bewiesen: Es sei $n \geq 2$ und es seien $\{f_h(x)\}$ und $\{g_h(y)\}$ [$h = 1, 2, \dots, n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$] zwei Systeme linearer homogener Formen, die Determinante D von $\{g_h\}$ sei von 0 verschieden, ferner seien die Koeffizienten der bilinearen Form $\sum_{h=1}^n f_h(x) g_h(y)$ ganze Zahlen; wenn t_1, t_2, \dots, t_n positive Zahlen bedeuten und das System $|f_h(x)| \leq t_h$ ($h = 1, 2, \dots, n$) in ganzen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n mit $\sum_{h=1}^n x_h^2 \neq 0$, $\sum_{h=1}^n f_h(x)^2 \neq 0$ sich lösen läßt, so kann man das System $|g_h(y)| \leq cL/t_h$ ($h = 1, 2, \dots, n$) auch in ganzen Zahlen y_1, y_2, \dots, y_n mit $\sum_{h=1}^n y_h^2 \neq 0$ lösen, wobei $L = \left(|D| \cdot \prod_{h=1}^n t_h \right)^{1/(n-1)}$

gesetzt wurde und c nur von n abhängt. 2. Ein einfacher Beweis des folgenden Satzes von V. Jarník [Trav. Inst. Math. Tblissi 3, 193—216 (1938); dies. Zbl. 19, 106] wird gegeben: es seien Θ_1 und Θ_2 linear unabhängige reelle Zahlen, es bedeute β die untere Grenze der Werte β' , für welche das System $|\Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2 - y| \leq 1/t$, $|x_1| \leq t^{\beta'}$, $|x_2| \leq t^{\beta'}$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ in ganzen Zahlen x_1, x_2, y für beliebig großes t lösbar ist, ferner sei γ die untere Grenze der Werte γ' , für welche das transponierte System $|q\Theta_1 - p_1| \leq 1/t$, $|q\Theta_2 - p_2| \leq 1/t$, $0 < |q| < t^{\gamma'}$ in ganzen Zahlen p_1, p_2, q , für beliebig großes t lösbar ist; dann ist $\gamma = 1/(1 - \beta)$. 3. Ein Satz von F. J. Dyson [Proc. London math. Soc., II. s. 49, 409—420 (1947)] bezüglich transponierter linearer Systeme wird mit derselben Methode neu bewiesen.

A. Rényi (Budapest).

Gál, I. S.: A theorem concerning diophantine approximations. Nieuw Arch. Wiskunde, II. s. 23, 13—38 (1949).

Es bedeute $[a, b]$ das kleinste gemeinsame Vielfache und (a, b) den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen a, b , und es sei $\langle a, b \rangle = \frac{(a, b)}{[a, b]}$.

Wenn $n_1 < n_2 < \dots < n_N$ eine Folge von ganzen Zahlen bedeutet, setzen wir $\Phi_N(n_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle n_i, n_j \rangle$, ferner $F(N) = \text{Max } \Phi_N(n_k)$ und $G(N) = \text{Max } \Phi_N(q_k)$,

wo die n_k alle ganze Zahlen und die q_k alle quadratfreien Zahlen durchlaufen. Die folgenden Sätze werden bewiesen: A. $G(N) = O(N \cdot \log \log N)$; B. $F(N) = O(N \cdot \log \log^2 N)$; ferner wird gezeigt, daß die Größenordnung in beiden Fällen die bestmögliche ist. Wir skizzieren den Beweis von A. 1. Schritt: Es bedeute p_v die v -te Primzahl; es seien $p_{v_1} < p_{v_2} < \dots < p_{v_h}$ sämtliche in q_1, q_2, \dots, q_N enthaltenen Primzahlen; man setze p_j statt p_{v_j} ($j = 1, 2, \dots, h$) in q_k ($k = 1, 2, \dots, N$), die so erhaltenen Zahlen seien q'_k ($k = 1, 2, \dots, N$); offenbar ist $\Phi_N(q_k) \leq \Phi_N(q'_k)$. 2. Schritt: Es sei p eine Primzahl; wir setzen $q''_k = q'_k/p$, wenn $p | q'_k$ und q'_k/p nicht unter den q'_j vorkommt, andernfalls sei $q''_k = q'_k$. Da $\langle a/p, b/p \rangle = \langle a, b \rangle$ und $\langle a/p, b \rangle = \langle a, b/p \rangle$, falls $p | a$ und $p | b$, da ferner $\langle a/p, b \rangle = p \langle a, b \rangle$, falls $p | a$, und $p \nmid b$, so sieht man leicht, daß $\Phi_N(q'_k) \leq \Phi_N(q''_k)$. Iteriert man Schritt 2 so lange wie möglich, so bekommt man eine Folge Q_1, Q_2, \dots, Q_N mit der Eigenschaft, daß die Folge mit jedem Q auch sämtliche Teiler von Q enthält. Folgen mit dieser Eigenschaft nennt Verf. kanonische Folgen; somit genügt es, $\Phi_N(q_k)$ für kanonische Folgen $q_k = Q_k$ von quadratfreien Zahlen zu untersuchen. Verf. beweist, daß die Anzahl h der Primzahlen, die mindestens ein Glied einer kanonischen Folge Q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) teilen, kleiner als $\text{const. } N \cdot \log N$ ist; das kann bedeutend verschärft werden, in der Tat ist $h \leq N - 1$. Beweis: es seien M_1, M_2, \dots, M_s die Maximalglieder der Folge Q_k , d. h. die M_r sind sämtliche solche Zahlen der Folge Q_k , für welche diese Folge keine Vielfache von M_r enthält; es seien h_1, h_2, \dots, h_s die Anzahlen der Primfaktoren von $M_1, M_2/(M_1, M_2), M_3/(M_1, M_2, M_3), \dots, M_s/(M_1, M_2, \dots, M_{s-1}, M_s)$; es ist offenbar $h_1 + h_2 + \dots + h_s = h$, ferner

$$1 + (2^{h_1} - 1) + (2^{h_2} - 1) + \dots + (2^{h_s} - 1) \leq N.$$

Da $2^n - 1 \geq n$ für positives ganzes n , so folgt $h \leq N - 1$; diese Abschätzung ist bestmöglich, da offenbar $h = N - 1$, wenn $Q_1 = 1$ und die Q_i ($i = 2, 3, \dots, N$) verschiedene Primzahlen sind. 3. Schritt: Verf. bemerkt, daß unter den Zahlen Q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) einer kanonischen Folge immer ein Q_j gefunden werden kann, für welches $\sum_{k=1}^N \langle Q_i, Q_k \rangle \leq C \cdot \log \log N$ ($C = \text{Konstante}$), und daraus folgt

Satz A mittels Induktion. Der Grundgedanke des Beweises von Satz B ist analog, nur treten manche neue technische Schwierigkeiten auf. Verf. bemerkt, daß für manche — für die Anwendungen wichtige — spezielle Folgen Satz B noch verschärft werden kann, es gilt z. B. für $n_k = k^a$ ($a \geq 1$ ganz) und für $n_k = a^{k-1}$

($a > 1$ ganz) die Abschätzung $\Phi_N(n_k) = O(N)$. Für den ersten Fall kann der in der Arbeit gegebene Beweis vereinfacht werden, wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_N(n_k) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle i, j \rangle^a \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle i, j \rangle \\ &= N + 2 \sum_{D=2}^N \frac{1}{D} \left[\frac{N}{D} \right] \sum_{\substack{d \leq D \\ (d, D)=1}} \frac{1}{d} \leq N + 2N \sum_{D=2}^{\infty} \frac{\log D + 1}{D^2} = O(N).\end{aligned}$$

Mittels der Formel

$$(1) \quad \int_0^1 \{ax\} \{bx\} dx = \frac{1}{12} \langle a, b \rangle,$$

wo $\{y\} = y - [y] - \frac{1}{2}$ und $[y]$ die größte Zahl $\leq y$ bedeutet, folgt

$$(2) \quad \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^N \{n_k x\} \right)^2 dx = \frac{1}{12} \Phi_N(n_k).$$

Von (2) ausgehend, wendet Verf. die erhaltenen Sätze an, um die Summe $\sum_{k=1}^N \{n_k x\}$ (x reell, $0 < x < 1$) fast überall abzuschätzen. Mit Verwendung der Hobson-Plancherel-Rademacherschen Beweisanordnung [s. z. B. K. Rademacher, Math. Ann., Berlin 87, 112—138 (1922)] erhielt Verf. den folgenden Satz: Für eine beliebige Folge von positiven ganzen Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$(3) \quad \sum_{k=1}^N \{n_k x\} = O(N^{\frac{1}{2}} \log^{2+\varepsilon} N)$$

fast überall im Intervall $0 < x < 1$, und bemerkt, daß durch leichte Abänderung des Beweises der Exponent $2 + \varepsilon$ in (3) durch $\frac{3}{2} + \varepsilon$ ersetzt werden kann. *A. Rényi.*

Mullineux, N.: On two problems of K. Mahler on irreducible star domains. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. 26, 375—382 (1947).

Es sei K ein zweidimensionaler Sternbereich mit Inhalt $V(K)$, minimaler Determinante $\Delta(K)$ und Rand L . Es sei weiter, wenn X, X_1, X_2 Punkte auf L , so daß $O, X, X_1 + X_2$ kollinear sind, $\omega(K) = \sup |X_1 + X_2|/|X|$. Mahler [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49 (1946)] stellte folgende zwei Probleme: 1. gibt es eine Konstante a_2 , so daß $\omega(K) \leq a_2$ für jedes irreduzible K [K ist irreduzibel, wenn für jeden Sternbereich $H \neq K$ im Innern von K $\Delta(H) < \Delta(K)$] und 2. ein b_2 , so daß $V(K) \leq b_2 \Delta(K)$? Verf. zeigt, daß diese beiden Fragen mit „Nein“ zu beantworten sind, d. h. der Fundamentalsatz von Minkowski läßt sich nicht auf irreduzible Sternkörper allgemein übertragen. *Hlawka (Wien).*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Bachmann, Friedrich: Über die Konstruierbarkeit mit Lineal, Rechtwinkelmaß und Eichmaß. Math.-physik. Semesterber., Göttingen 1, 77—88 (1949).

Hilbert hat in seinen Grundlagen der Geometrie den Satz ausgesprochen, daß alle Konstruktionsaufgaben, die unter Zugrundelegung seiner Axiome I 1—3, II, III und IV lösbar sind, sich mit Lineal und Eichmaß durchführen lassen. Verf. erhält eine analoge Aussage, wobei zum Lineal und Eichmaß noch das Rechtwinkelmaß hinzugezogen, dagegen das Parallelenaxiom IV durch das schwächere „Axiom der euklidischen Metrik“ ersetzt wird. Dabei wird das Lineal allein zur Konstruktion der Verbindungsgerade zweier Punkte benutzt und nicht, wie bei Hilbert, auch zur Konstruktion des Schnittpunktes zweier nicht-paralleler Geraden. Ferner wird die Frage untersucht, welche Punkte man, von gegebenen Punkten ausgehend, mit den obigen Instrumenten konstruieren kann

L. Fejes Tóth (Budapest).

Tortorici, M.: Rapporto tra proiezione ortogonale di un segmento e segmento obiettivo in geometria piana iperbolica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 116—119 (1948).

Sind zwei nichtschneidende Geraden in der hyperbolischen Ebene gegeben und nimmt man auf einer von ihnen von dem Schnittpunkt mit der gemeinsamen Senkrechten beider Geraden aus eine Strecke an, so ist das Verhältnis zwischen der Orthogonalprojektion dieser Strecke auf die zweite Gerade und der Strecke selbst eine abnehmende Funktion dieser Strecke. Geht die Strecke gegen Null, so ist die Grenze jenes Verhältnisses der Kosinus des Winkels der beiden Geraden, wenn man unter diesem Winkel das Komplement des Winkels des Parallelismus bezüglich der kürzesten Entfernung der beiden Geraden versteht. Verf. benutzt zum Beweis die Abbildung der Geraden der hyperbolischen Ebene durch die auf der x -Achse der euklidischen Ebene orthogonalen Halbkreise der Halbebene der nicht negativen Ordinaten.

Zacharias (Quedlinburg).

Ball, Richard William: Dualities of finite projective planes. Duke math. J. 15, 929—940 (1948).

Die Arbeit ist die ausführliche Fassung der in dies. Zbl. 31, 63 besprochenen Note (Abstract of a Thesis) gleichen Titels.

Sperner (Bonn).

Elementargeometrie:

Cavallaro, Vincenzo G.: Sull'appartenenza di punti notevoli del triangolo alla circonferenza del suo incerchio. Boll. Mat., Genova, V. s. 2, 33—35 (1948).

Ist die Entfernung eines Punktes P der Ebene des Dreiecks ABC vom Inkreismittelpunkt als Funktion der Dreiecksseiten bekannt, $PI = F(a, b, c)$, so läßt sich wegen der bekannten Formel $r^2 = 16\Delta^2 : 4(a + b + c)^2$, in der Δ den Dreiecksinhalt und r den Inkreisradius bedeutet, die Bedingung, daß P auf dem Inkreis liegt, $PI = r$, durch eine Beziehung zwischen a, b, c ausdrücken. Verf. bestimmt diese Beziehung für den Schwerpunkt der Ecken, den Umfangsschwerpunkt, den Nagelschen Punkt, den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises und den Umkreismittelpunkt.

Zacharias (Quedlinburg).

Muracchini, Luigi: Sulla specie degli angoli dei poliedri generalizzati. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 32—34 (1948).

Anschließend an einen Aufsatz von Lebesgue [J. Math. pures appl., IX. s. 19, 27—43 (1940); dies. Zbl. 24, 287] wird gezeigt, daß auf einem Polyeder vom Geschlecht $p = 0$ bzw. $p > 1$ stets ein von zwei anstoßenden Seiten einer Polyederfläche bestimmter Winkel existiert, so daß $1/s + 1/k >$ bzw. $< \frac{1}{2}$ gilt, wobei s und k die Seitenzahl bzw. Kantenzahl der zum Winkel gehörigen Fläche bzw. Ecke bedeutet. Für Polyeder mit $p = 1$ gibt es Winkel von beiderlei Art, es sei denn, daß für sämtliche Winkel $1/s + 1/k = 0$ gilt.

L. Fejes Tóth.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Prasad, Gorakh and H. C. Gupta: A text-book on co-ordinate geometry.** Allahabad: Pothisala 1947. 327 p. Rs. 5.

Taussky, O. and L. A. Wigglesworth: Note on a theorem in n -dimensional geometry. Amer. math. Monthly 55, 492—494 (1948).

Gli A. A. dimostrano che un teorema di Schäfli su un sistema di equazioni lineari omogenee ed esprimente che non può esservi una iperquadrica rispetto alla quale un dato semplice (non degenero) sia ad un tempo iscritto e autopolare è equivalente al teorema esprimente che se una trasformazione lineare intera e omogenea sulle coordinate cartesiane ortogonali di uno S_n ammette n punti (non appartenenti a un iperpiano per l'origine) le cui distanze mutue e dall'origine restano invariate, essa è una trasformazione ortogonale.

P. Buzano (Turino).

Labra, M.: Analytische Untersuchung einer Homothetie im Dreieck. Rev. Ci., Lima 50, 39—68 (1948) [Spanisch].

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet ein Satz von C. F. Gauß (1810), der besagt, daß die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks auf einer Geraden, der Gaußschen Geraden, liegen. Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkt P seiner Ebene und zeichnet man das Fußpunktdreieck dieser drei Transversalen, so entstehen drei vollständige Vierecke mit der gemeinsamen Ecke P . Die Gaußschen Geraden, die auf diese Weise dem Punkt P zugeordnet werden können, gehen durch einen Punkt, den der Verf. Newtonschen Punkt nennt. Es werden die Newtonschen Punkte verschiedener ausgezeichnete Punkte des Dreiecks bestimmt und eine Reihe merkwürdiger Sätze über kollineare Punkte und konkurrierende Geraden abgeleitet. Zum Beispiel: Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, der Nagelsche Punkt und die Newtonschen Punkte dieser drei Punkte liegen auf einer Geraden. Weiterhin wird bewiesen, daß in jedem Dreieck ein beliebiger Punkt P mit seinem Newtonschen Punkt und dem Schwerpunkt S auf einer Geraden liegt, so daß stets $SN : NP = 1 : 3$ ist. Beschreibt P einen geometrischen Ort, so durchläuft N einen Ort gleicher Art, der mit Bezug auf S zum ersten Ort perspektiv ähnlich ist mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $1/4$. Der Satz gilt auch, wenn P außerhalb des Dreiecks oder auf seinem Umfang liegt. Im letzteren Fall ergeben sich bemerkenswerte Besonderheiten. Durchläuft P den Dreiecksumfang in bestimmtem Sinn, so durchläuft der zugehörige Newtonsche Punkt ein zum gegebenen in bezug auf dessen Schwerpunkt perspektiv ähnliches Dreieck, das Newtonsche Dreieck. In einer weiteren Arbeit will der Verf. dieses Dreieck eingehender untersuchen. Die Beweisführung erfolgt mit elementaren Mitteln der analytischen Geometrie unter Zugrundelegung eines schiefwinkligen Koordinatensystems, dessen Achsen zwei Dreiecksseiten sind. *E. Löffler.*

Satyanarayana, K.: S -quadrics and isotomic polars. Math. Student, Madras 15, 13—15 (1947).

Einige Sätze der Simplexgeometrie in einem Raume S_n . Sie werden analytisch in homogenen baryzentrischen Koordinaten bewiesen; das gegebene Simplex ist das Fundamentalsimplex der Koordinaten; die Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_{n+1} eines Punktes werden so normiert, daß ihre Summe gleich 1 wird. Die Sätze betreffen das Quadrikenbüschel $S(\lambda) = \sum (x_r - x_s)^2 - \lambda (\sum x_r)^2 = 0$, wo jede Differenz $x_r - x_s$ in der ersten Summe nur einmal vorkommt; λ ist der Parameter des Büschels; eine besondere Rolle spielen die Quadriken $S(1)$ und $S(-1)$; man hat z. B., daß $S(\lambda)$ und $S(1/\lambda)$ polarreziprok in bezug auf $S(1)$ und $S(-1)$ sind. Es folgen Anwendungen auf die Quadriken $S(n)$ und $S(1/n)$ für $n = 2, 3$. *E. G. Togliatti.*

Todd, J. A.: Combinants of a pencil of quadric surfaces. III, IV. Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 186—195, 196—199 (1948).

Die zwei vorliegenden Abhandlungen bilden eine Fortsetzung von zwei früheren desselben Verf. mit demselben Titel [s. dies. Zbl. 29, 162]. Hier werden aus den invarianten Bildungen eines Quadrikenbüschels diejenigen abgesondert, die, gleich Null gesetzt, Strahlenkomplexe darstellen. — In der Abhandlung III, die einen vorbereitenden Charakter hat, bemerkt Verf. zunächst, daß die irreduziblen Strahlenkomplexe, welche mit einem Quadrikenpaar S, S' projektiv invariant verbunden sind, auf 16 reduziert werden können: 8 quadratische und 8 kubische Strahlenkomplexe. Darunter finden sich, besonders wichtig, der tetraedrale Komplex Γ der Polargeraden der verschiedenen Punkte des Raumes in bezug auf S, S' und ein anderer tetraedraler Komplex Ψ . Die übrigen 14 erscheinen alle als Koeffizienten in gewissen binären Formen der Parameter λ_0, λ_1 des Büschels $\lambda_0 S + \lambda_1 S' = 0$; von diesen Formen sind zwei linear, zwei quadratisch und eine kubisch. Alle diese Strahlenkomplexe werden zusammengefaßt und sowohl geometrisch als auch analytisch beschrieben; ihre kanonischen Gleichungen werden in demselben besonderen

Koordinatensystem angegeben, das in den ersten zwei Abhandlungen schon benutzt worden ist. Lange Rechnungen, die nicht wiedergegeben werden, führen dann zu verschiedenen Syzygien, die die 16 Strahlenkomplexe miteinander verbinden. — In der Abhandlung IV werden alle kovarianten Strahlenkomplexe des Büschels $\lambda_0 S + \lambda_1 S' = 0$ bestimmt. Die Sätze der Abhandlung I zeigen, daß sie aus Γ, Ψ und aus dem vollständigen System der in III betrachteten binären Formen von λ_0, λ_1 (zusammen mit der Diskriminante Δ des Büschels) bestehen. Die in III gefundenen Syzygien vereinfachen die Arbeit. Man findet so, daß alle gesuchten Strahlenkomplexe aus zwei Invarianten des Büschels, aus Γ, Ψ und aus anderen 14 Komplexen (6 der Ordnung vier und 8 der Ordnung sechs) sich ausdrücken lassen; diese sind voneinander unabhängig. Die geometrische Beziehung zwischen Γ, Ψ erscheint deutlich, wenn man sie im fünfdimensionalen Raume darstellt; in der Tat kann man die Sache so einrichten, daß Γ, Ψ sich auf die Schnitt- V_3 der Kleinschen Fundamentalquadrik Ω mit zwei anderen in bezug auf Ω polarreziproken Quadriken abbilden.

E. G. Togliatti (Genova).

Mayer, O.: Remarques sur la décomposition en homologies harmoniques d'une collinéation hermitienne. Ann. sci. Univ. Jassy, Sect. I 30, 37—42 (1948).

L'A. précise un théorème de Bertini sur la décomposition en homologies harmoniques d'une collinéation qui conserve une quadrique non dégénérée Q d'un espace S_r , en démontrant que: Supposant donnée une collinéation C qui conserve la quadrique non dégénérée Q de S_r et qui possède un S_m principal, 1. si C n'est pas une collinéation biaxiale parabolique, on peut la décomposer en $r - m$ homologies conservant Q ; les hyperplans de ces homologies sont indépendantes et passent par S_m ; leur nombre ne peut pas être abaissée; 2. si C est biaxiale parabolique, une telle décomposition exige exactement $r - m + 2$ homologies.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Ladopoulos, P. D.: Beitrag zur projektiven Geometrie. Über Kinematik geometrischer Gebilde. Bull. Soc. math. Grèce 23, 51—123 u. franz. Zusammenfassg. 124—126 (1948) [Griechisch].

Das Problem der Existenz beweglicher Polyeder ist von R. Bricard [J. Math. pur. appl., V. s. 3, 113—148 (1897)] für Oktaeder systematisch untersucht worden [s. auch Kokotsakis, dies. Zbl. 5, 369]. Verf. untersucht diese Frage allgemein für n -Ecke in der Ebene, n -Kante im Strahlenbündel und Polyeder im Raume. Er stellt Kriterien für die Nicht-Beweglichkeit, endliche oder unendliche Beweglichkeit von n -Ecken, bzw. n -Kanten auf. Die Untersuchung der Kinematik von Polyedern im Raume wird auf die Untersuchung geeigneter n -Kanten im Bündel zurückgeführt. Nach Verf. sind seine Kriterien auf nicht-Euklidische Geometrien übertragbar.

D. A. Kappos (Erlangen).

Emch, Arnold: Neue durch stereographische Projektion erhaltene Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit Nabelpunkten. Mh. Math., Wien 52, 189 (1948).

Kurze geometrische Beweise folgender zwei Sätze über Quadriken: 1. Die stereographische Projektion einer Quadrik F von einem ihrer reellen Nabelpunkte aus auf eine ihm zugehörige Kreisschnittebene p liefert als Bild aller ebenen Schnitte von F die Kreise der Ebene p . — 2. Die Projektionen eines ebenen Schnittes von F aus zwei diametral gelegenen Nabelpunkten auf eine Ebene p des zugehörigen Kreisschnittsystems, welche F im Kreise γ schneidet, sind zwei in bezug auf γ inverse Kreise.

E. G. Togliatti (Genova).

Algebraische Geometrie:

Severi, Francesco: Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. 26, 221—270 (1947).

Die vorliegende Arbeit bildet einen Beitrag zur Auseinandersetzung des Verf. mit O. Perron über die Begründung der algebraischen Geometrie. [Vgl. hierzu O. Perron, *Math. Z.* **47**, 318—324 (1941); dies. *Zbl.* **24**, 276; **49**, 654—680 (1944); F. Severi, *Abh. math. Sem. Hansische Univ.* **15**, 97—119 (1943).] Die eigentliche, trotz aller Verschiedenheit der beiderseitigen Standpunkte durchaus sachliche Polemik nimmt, abgesehen von der Einleitung (§ 1), einen großen Teil von § 6 und § 7 ein, wo Verf. beim Bézoutschen Satz über die Anzahl der Schnittpunkte von n Hyperflächen im n -dimensionalen projektiven Raum die Benutzung der Kroneckerschen Eliminationsmethode gegen Perronsche Einwände verteidigt, obwohl er selbst zeigt, daß die formale Anwendung der Methode in Spezialfällen zu falschen Multiplizitäten führen kann. Referent muß gestehen, daß er das Festhalten an der Kroneckerschen Methode nicht richtig versteht, nach dem doch van der Waerden gezeigt hat, daß die Benutzung der Mertensschen u -Resultante bei dem zur Diskussion stehenden Bézoutschen Satz immer einwandfreie Vielfachheiten liefert. Allerdings führen die Stetigkeitsbetrachtungen, die Verf. zur Ergänzung der Kroneckerschen Eliminationsmethode heranzieht, in einem Sonderfall weiter, nämlich dann, wenn die u -Resultante identisch verschwindet und außer mindestens eindimensionalen Schnittmannigfaltigkeiten noch isolierte Schnittpunkte auftreten. Aber auch hier wäre zu überlegen, ob man die Stetigkeitsbetrachtungen nicht ebenso gut an die u -Resultante anknüpfen kann. — Das Hauptgewicht der Arbeit liegt entschieden auf § 2 bis § 5. In § 2 und § 3 wird die Schnittvielfachheit endlich vieler Hyperflächen in einem beliebigen Punkt auf einer gemeinsamen irreduzibeln Mannigfaltigkeit definiert. Insbesondere wird untersucht, in welchen Ausnahmepunkten einer irreduzibeln Schnittmannigfaltigkeit die Vielfachheit größer werden kann als in einem allgemeinen Punkt der gleichen Mannigfaltigkeit. Die Vielfachheitsbestimmung wird durchweg auf eine Anwendung des Bézoutschen Satzes zurückgeführt. Man wird also stets algebraisch befriedigende Vielfachheiten erhalten, wenn man dieses Theorem auf die Mertenssche u -Resultante gründet. Was die Kroneckersche Eliminationsmethode angeht, so zeigt Verf. in § 5, daß sie wenigstens in jedem Falle ausreicht, um zu entscheiden, ob ein zur Diskussion stehender Schnittpunkt die Vielfachheit 1 besitzt oder nicht. — Unter dem Gesichtspunkt, daß man angesichts der Schwierigkeiten der Vielfachheitsdefinition so weit wie möglich mit einfachen Schnittpunkten auszukommen suchen wird, stellt § 4 unbedingt den Höhepunkt der Arbeit dar. Hier beweist Verf. auf Grund der Definitionen von § 2 und § 3 den Satz: Jede von singulären Punkten freie irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit M_r einer beliebigen Dimension $r < n$ im n -dimensionalen projektiven Raum R_n läßt sich darstellen als einfacher Durchschnitt von höchstens $n + 1$ Hyperflächen $\Phi_{n-1}^{(j)}$. (Es gehört also nicht nur ein Punkt von R_n dann und nur dann zu M_r , wenn er auf allen $\Phi_{n-1}^{(j)}$ liegt, sondern es besitzt auch jeder Punkt von M_r als Schnittpunkt der $\Phi_{n-1}^{(j)}$ die Vielfachheit 1.) Als Ausgangspunkt für den Beweis dient die sorgfältige Diskussion des Spezialfalles $r = 1$, $n = 3$. Dann folgt ein verhältnismäßig einfacher Induktionsschluß. Ergänzend wird durch ein Beispiel gezeigt, daß eine singularitätenfreie Kurve im 3-dimensionalen Raum nicht immer als einfacher Durchschnitt von höchstens 3 Flächen darstellbar ist. Für $r = 1$, oder für den Fall einer singularitätenfreien Kurve in einem projektiven Raum beliebig hoher Dimension, läßt sich das Ergebnis auf Grund eines bekannten Bertinischen Satzes noch dahin verschärfen, daß die Hyperflächen $\Phi_{n-1}^{(j)}$ stets selbst singularitätenfrei gewählt werden können. Verf. vermutet, daß eine entsprechende Verschärfung für alle der Bedingung $2r < n$ genügenden Dimensionen r möglich ist, nicht aber für die Dimensionen r mit $2r > n$. Krull (Bonn).

Zariski, Oscar: The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. *Trans. Amer. math. Soc.* **62**, 1—52 (1947).

Der einfache Punkt einer abstrakten algebraischen Mannigfaltigkeit V kann auf zwei äußerlich völlig verschiedene Weisen definiert werden: A. Ein Punkt P einer r -dimensionalen, irreduzibeln algebraischen V heißt auf V dann und nur dann einfach, wenn das Ideal der Nichteinheiten in dem zu P gehörigen Quotientenring eine Basis von r Elementen besitzt. B. Ist $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_j(x_1, \dots, x_n))$ eine Basis des definierenden Primideals von V in einem Raume S_n , so ist P auf V dann und nur dann einfach, wenn die Jacobische Matrix $\frac{\partial(f_1, \dots, f_j)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ in P den Rang $n - r$ besitzt. — Die systematische und in gewissem Sinne abschließende Diskussion der zwischen den Definitionen A. und B. bestehenden Beziehungen ist das Thema der vorliegenden Arbeit. Ist der Grundkörper \mathbb{K} vollkommen, so sind bei jeder Charakteristik beide Definitionen gleichwertig. Ist aber \mathbb{K} im Falle einer Primzahlcharakteristik p unvollkommen, so ergibt sich zwar einerseits, daß jeder im Sinne von B. einfache Punkt auch im Sinne von A. einfach sein muß. Andererseits aber zeigen Beispiele, daß die Einfachheit im Sinne von A. keineswegs immer die Einfachheit im Sinne von B. nach sich zu ziehen braucht. Nennt man weiter, anknüpfend an die übliche Bezeichnung „absolut irreduzibel“, einen im Sinne der Definition A. einfachen Punkt P absolut einfach, wenn P auch bei jeder algebraischen Erweiterung des Grundkörpers (im Sinne von A.) einfach bleibt, so erhält man den Satz: P ist dann und nur dann im Sinne von B. einfach, wenn P absolut einfach ist. Es ist daher zweckmäßig, unter „Einfachheit“ schlechthin stets „Einfachheit im Sinne von Definition A.“ zu verstehen, und die Einfachheit im Sinne von Definition B. durch den Zusatz „absolut“ zu kennzeichnen. Der Begriff der Einfachheit schlechthin ist für die Theorie abstrakter algebraischer Mannigfaltigkeiten über unvollkommenen Grundkörpern wichtiger als der Begriff der absoluten Einfachheit. Das zeigt sich vor allem darin, daß sich schlechthin einfache Punkte im abstrakten Fall gegenüber birationalen Transformationen in vieler Hinsicht genau so verhalten wie im klassischen Fall. Dagegen würden wesentliche klassische Ergebnisse über unvollkommenen Grundkörpern einwandfrei falsch, wenn man unter „einfach“ soviel wie „absolut einfach“ verstehen wollte. Auch kann verhältnismäßig leicht bewiesen werden, daß eine irreduzible Mannigfaltigkeit stets einfache Punkte besitzt, während Beispiele zeigen, daß kein einziger Punkt absolut einfach zu sein braucht. Viel tiefer dagegen liegt der Beweis der Tatsache, daß die Menge aller nichteinfachen Punkte stets ebenso wie die Menge aller nicht absolut einfachen Punkte eine algebraische (also durch das Verschwinden gewisser Polynome charakterisierte) Mannigfaltigkeit bildet; denn die Definition A. ist im Gegensatz zur Definition B. nicht global, sondern durchaus lokal. Indessen kann auch diese Schwierigkeit überwunden werden, und zwar durch Herleitung eines algebraischen Kriteriums für einfache Punkte, in dem gewisse „gemischte Jacobische Matrizen“ auftreten, die außer den gewöhnlichen Ableitungen nach den Koordinaten x_1, \dots, x_n noch weitere Ableitungen enthalten, die durch abstrakte Differentiation in \mathbb{K} über \mathbb{K}^p entstehen. (Im Falle eines vollkommenen Grundkörpers reduziert sich dieses algebraische Kriterium auf das klassische, wegen der Vollkommenheit mit A. äquivalente, Kriterium B.) — Von der Definition des einfachen Punktes schreitet Verf. weiter zur Definition der einfachen Teilmannigfaltigkeit einer beliebigen positiven Dimension m . Die Methode ist dabei grundsätzlich die übliche: Reduktion des Falles $m > 0$ auf den Punktfall $m = 0$ durch Adjunktion der passend gewählten Variablen x_1, \dots, x_m zum Grundkörper \mathbb{K} . Die Durchführung aber ist bei unvollkommenem \mathbb{K} keineswegs trivial. Hinsichtlich der Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Krull (Bonn).

Segre, Beniamino: Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 204—212 (1947).

F. Severi hat für die Anzahl δ der Doppelpunkte einer algebraischen Fläche

der Ordnung m die Ungleichung gegeben: $\delta \leq \binom{m+2}{3} - 4$ (1) [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. 25, 1—41 (1946)]; der größte Wert von δ wird für $m = 4, 5$ von der Kummerschen Fläche und von einer Fläche des Ref. erreicht. Der Beweis jener Ungleichung setzt aber voraus, daß eine stetig veränderliche algebraische Fläche, welche, in einer besonderen Lage, eine gewisse Anzahl von Doppelintegralen 2. Art verliert, notwendigerweise wenigstens ebenso viele Moduln auch verliert. Verf. bemerkt hier, daß die Ungleichung (1) nur für reguläre Systeme algebraischer Flächen mit δ Doppelpunkten gelten kann. Andererseits kann nicht die größtmögliche Anzahl μ_m der isolierten Doppelpunkte einer algebraischen Fläche der Ordnung m die Form $\mu_m = am^3 + bm^2 + cm + d$ haben, wo a, b, c, d rationale Zahlen sind; denn (1) zieht $a \leq \frac{1}{6}$ nach sich, während Verf. hier ein Beispiel gibt, das zeigt, daß $a > \frac{1}{6}$ sein müßte. — Als Beispiel dient die Fläche der Ordnung rn : $F(x) = |f_{ij}(x)| = 0$, wo die algebraischen Formen $f_{ij}(x)$ die Ordnung n haben und eine symmetrische Determinante der Ordnung r bilden. Bei veränderlichen $f_{ij}(x)$ bilden die Flächen $F(x) = 0$ ein System Σ mit der Dimension $\Theta = \binom{r+1}{2} \binom{n+3}{3} - r^2$; die allgemeine Fläche des Systems Σ besitzt $\delta^* = \binom{r+1}{3} n^3$ Doppelpunkte, so daß, sobald $r \geq 2$ und $n \geq 4$ ist, die effektive Dimension Θ von Σ größer als die virtuelle $\Theta = \binom{rn+3}{3} - 1 - \delta^*$ ist; Σ ist also nicht regulär. Man kann dann noch den Formen $f_{ij}(x)$ eine solche besondere Form erteilen, daß die Anzahl der Doppelpunkte von $F(x) = 0$ den Wert $\delta_1 = \delta + \frac{1}{2}rn^2(n-1) = \frac{1}{6}rn(r^2n^2 + 2n^2 - 3n)$ erreicht und so den Wert (1) überschreitet, sobald $r \geq 2$ und $n > \frac{3}{2}(r+1)$ ist.

E. G. Togliatti (Genova).

Enriques, F.: Sur la démonstration géométrique d'un théorème de Picard, concernant les surfaces algebriques. Rev. Acad. Ci. exact fisic. natur. Madrid 42, 5—7 (1948).

Der bereits 1946 verstorbene Verf. untersucht die bekannten Sätze von Picard und Severi über die Dimension des adjungierten Systems auf einer irregulären Fläche und glaubt, gegen Severis Beweisführung Bedenken äußern zu müssen, die sich jedoch als unbegründet erwiesen haben.

Gröbner (Innsbruck).

Pissard, Nelly: Sur les surfaces à sections hyperplanes hyperelliptiques. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. s. 23, Nr. 1, 35 S. (1949).

Im 1. Teil dieser Abhandlung betrachtet Verf. in einer Ebene σ das Linearsystem $|I^n|$ aller Kurven der Ordnung n , die in h Punkten allgemeiner Lage A_1, A_2, \dots, A_h die Multiplizitäten s_1, s_2, \dots, s_h aufweisen, zusammen mit dem Linearsystem $|I^{n-1}|$ der Kurven, die in denselben Punkten die Multiplizitäten $s_1 - 1, s_2, \dots, s_h$ aufweisen. Es werden folgende einschränkende Voraussetzungen gemacht: $|I^n|$ ist einfach, regulär und hat eine Dimension $r \geq 3$; $|I^{n-1}|$ ist regulär und hat eine Dimension $r' \geq n - s_1$; der Punkt A_1 ist eigentlich; es ist $n + s_1 > s_2 + s_3 + \dots + s_h$. Es sei dann F die Fläche eines Raumes S_r , die von $|I^n|$ auf σ abgebildet wird. Mit allen diesen Voraussetzungen, und durch die projektive Erzeugung einer Kurve I^n mit einem Büschel von I^{n-1} und dem Strahlbüschel A_1 , findet man, daß F auf einer $V_{n-s_1+1}^{r'+1}$ liegt; diese V ist ihrerseits der Schnitt mit dem Raume S_r einer Segreschen Mannigfaltigkeit, die die Punktepaare einer Geraden und eines $S_{r'}$ darstellt. — Im 2. Teil wird alles das auf diejenigen Linearsysteme angewendet, welche, nach einem wohlbekannten Satz von G. Castelnuovo, die Fundamentaltypen der Flächen mit hyperelliptischen Schnittkurven darstellen. Es handelt sich um folgende zwei Fälle: $n = \pi + 3$, $h = 2$, $s_1 = \pi + 1$, $s_2 = 2$; $n = 2\pi + 2 - \mu$, $h = \pi - \mu + 1$, $s_1 = 2\pi - \mu$, $s_2 = \dots = s_h = 2$, die Punkte A_2, \dots, A_h sind aber dem Punkt A_1 unendlich benachbart ($\mu \leq \pi$). Als Fläche F

findet man eine $F^{2\pi+4}$ im Raume $S_{3\pi+5}$ mit hyperebenen Schnittkurven des Geschlechts π , welche der Schnitt einer $V_3^{3\pi+3}$, Ort von ∞^1 Ebenen, mit einer durch $2\pi+2$ jener Ebenen hindurchgehenden Quadrik ist; die $V_3^{3\pi+3}$ kann sich auf einen Kegel reduzieren. — Im 3. Teil studiert Verf. zwei besondere Fälle. Zunächst den Fall eines Systems $|I^n|$ mit einem $(n-2)$ -fachen Basispunkt A und h einfachen Basispunkten A_i ; und zweitens den Fall, wo die Kurven $|I^n|$ die Geraden AA_i in den Punkten A_i berühren. Dieser zweite Fall, für $h=n-1$, ist von Rozet schon betrachtet worden [Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 25, 336—368 (1939)]. Auch jetzt erhält man zwei Flächen, die, wie die früheren allgemeineren, als geeignete Schnitte höherer Mannigfaltigkeiten konstruiert werden können; die entsprechenden Beweise werden aber für diese besonderen Fälle wiederholt. — Im 4. Teil bemerkt Verf., daß die Kurven $|I^n|$ des letzten Beispiels als adjungierte Kurven einer eventuellen Kurve Δ^{n+3} mit einem $(n-1)$ -fachen Punkt A und h Selbstberührungspunkten A_i erscheinen, und so, daß die Tangenten an Δ in den Punkten A_i durch den Punkt A hindurchgehen. Die entwickelte hyper-räumliche Konstruktion gestattet dann, die Kurve Δ zu konstruieren und so ihre Existenz zu beweisen, wenn $5n-6h+9 \geq 0$. Ist $h=n-1$, so wird $n \leq 15$, wie schon F. Enriques vermutet hatte.

E. G. Togliatti (Genova).

Rollero, Aldo: *Sopra una rigata osculatrice ad una superficie algebrica lungo una sua conica.* Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 65—72 (1947).

Es wird hier eine algebraische Fläche F^n der Ordnung n betrachtet, die einen irreduziblen Kegelschnitt γ enthält. Die Haupttangente t_1, t_2 von F^n längs γ bilden im allgemeinen eine Regelfläche der Ordnung $6n-8$ und des Geschlechts $4n-8$. Auf γ gibt es im allgemeinen $8n-14$ parabolische Punkte von F^n . In der Umgebung eines allgemeinen Punktes P von γ beschreiben die beiden Tangenten t_1, t_2 zwei getrennte Flächenelemente, die mit F^n in P eine Berührung 2. Ordnung aufweisen. Zahlreiche Besonderheiten werden diskutiert.

E. G. Togliatti (Genova).

Babbage, D. W.: *Twelve associated points in [5].* J. London math. Soc. 23, 58—64 (1948).

$2n+2$ Punkte eines Raumes S_n werden assoziiert genannt, wenn alle Quadriken, die $2n+1$ jener Punkte enthalten, auch den übrigen Punkt enthalten. Verf. betrachtet hier eine assoziierte Punktgruppe P_i ($i=1, \dots, 12$) in einem Raume S_5 ; sie hängt von 50 Parametern ab. Aber nur 9 von den Punkten P_i können beliebig gewählt werden; es seien dies die Punkte P_1, \dots, P_9 ; die drei übrigen Punkte der Gruppe P_{10}, P_{11}, P_{12} müssen dann auf einer gewissen kubischen Hyperfläche liegen, die von den 9 ersten Punkten vollständig bestimmt wird und deren Gleichung die Form einer gleich Null gesetzten nicht symmetrischen Determinante 3. Ordnung hat. Sie besitzt außerdem als Doppelkurve eine elliptische C^6 , die durch die 9 Punkte P_1, \dots, P_9 hindurchgeht. Die Ebene $P_{10}P_{11}P_{12}$ schneidet die Kurve C^6 in drei Punkten, die zusammen mit P_{10}, P_{11}, P_{12} , auf einem Kegelschnitt liegen. — Ähnliche Überlegungen zeigen schließlich, daß die 10 Punkte P_i einer assoziierten Punktgruppe eines Raumes S_4 zu einer normalen kubischen Regelfläche führen, als Ort der Punkte P_9, P_{10} , die, zusammen mit 8 beliebig gewählten Punkten, eine assoziierte Punktgruppe bilden.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: *Sur une surface représentant une involution cyclique du quatrième ordre.* Math. Notae, Rosario 7, 205—211 (1947).

L'auteur donne un exemple d'involution cyclique du quatrième ordre, appartenant à une surface F de l'espace à cinq dimensions, d'équations

$$x_4^4 = \varphi_1(x_0, x_1, x_3, x_2), \quad x_5^4 = \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_4 x_5 = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

où φ_1, φ_2 sont de formes du quatrième degré et φ une forme algébrique du second degré. — La surface F est transformée en elle-même par l'homographie cyclique de

période quatre, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : ix_4 : -ix_5.$$

Cet homographie engendre sur F une involution I_4 d'ordre quatre. — La surface F' , image de cet involution, du huitième ordre, appartenant à l'espace ordinaire, possède, en chaque point de diramation, un point double biplanaire, auquel est infiniment voisin un point double conique. L'au. donne ensuite l'équation de certaines familles de surfaces ayant un contact du troisième ordre, avec surface image le long de certaines courbes.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Godeaux, Lucien: Remarques sur les surfaces algébriques possédant une involution cyclique privée de points unis. Ann. Soc. Polonaise Math. 29, 241—250 (1949).

L'auteur démontre que: 1. Si une surface régulière F de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p , privée de points unis et dont l'image est une surface Φ de genre arithmétique $p'_a > 0$, le système canonique $|C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution; l'un a la dimension $p'_a - 1$ et est le transformé du système canonique de Φ , les autres ont la dimension p'_a ; 2. Si une surface algébrique régulière F , de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p , privée de points unis et dont l'image est une surface Φ , de genre arithmétique $p'_a = 0$, le système canonique $|C|$ de F contient $p - 1$ courbes isolées appartenant à l'involution. On a $p_a = p - 1$; 3. Si une surface d'irrégularité q , de genre arithmétique $p_a > 1$, dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p privée de points unis, et dont l'image est une surface Φ d'irrégularité q' et de genre arithmétique $p'_a > 0$, le système canonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, dont l'un est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Villa, Mario: Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 8—15 (1948).

Es sei T eine Transformation, die die Punkte einer Ebene π in die Punkte einer Ebene $\bar{\pi}$ einindeutig transformiert; es sei O, \bar{O} ein Paar entsprechender Punkte, wo die Jacobische Determinante der Transformation von Null verschieden ist. Ein Inflexions- \bar{E}_3 zweiter Art mit dem Ursprung O (d. h. \bar{O} und drei ihm unendlich benachbarte Punkte auf einer von \bar{O} ausgehenden Geraden \bar{t}) wird von T in ein Element 3. Ordnung E_3 mit dem Ursprung O transformiert; dieser E_3 liefert, wie bekannt, eine Projektivität zwischen dem Strahlbüschel O und den Punkten der Geraden t , die E_3 in O berührt; es sei P der Punkt von t , welcher einer beliebig gewählten Geraden a des Büschels O in jener Projektivität entspricht; bei festem a und veränderlichem \bar{t} beschreibt P eine Kurve 5. Ordnung C^5 mit vierfachem Punkt O ; die 4 Geraden, die C^5 in O berühren, sind die Gerade a selbst und die drei charakteristischen Geraden der Transformation T . Läßt man dann auch die Gerade a im Büschel O sich ändern, so beschreibt C^5 das im Titel genannte Büschel. Fällt a mit einer der drei charakteristischen Geraden von T zusammen, so zerfällt die entsprechende C^5 in diese Gerade und eine C^4 mit dreifachem Punkt O . Verf. betrachtet auch den Fall, wo die charakteristischen Geraden von T in O unbestimmt sind. Schließlich benutzt Verf. das gefundene C^5 -Büschel, und besonders seine zerfallenden C^5 , um die Gleichungen von T in der Umgebung des Paares O, \bar{O} auf eine einfache projektiv-invariante Form zu reduzieren; es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die charakteristischen Geradenpaare in O, \bar{O} alle verschieden sind, oder zwei von ihnen zusammenfallen, oder sie sich auf ein einziges Paar reduzieren.

E. G. Togliatti (Genova).

Villa, M.: Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 122—127 (1948).

Die Kurven eines ebenen homaloidischen Netzes (einer Ordnung $n > 1$) besitzen folgende charakteristische Eigenschaft: ihre Schnittpunkte mit der Jacobischen Kurve J des Netzes fallen alle in die Basispunkte des Netzes. Der Beweis dieses Satzes folgt aus der Formel:

$$(1) \quad \sum r(3r-1) x_r = 3n(n-1),$$

welche die obige Voraussetzung ausdrückt. Hier bedeutet $x_r (\geq 0)$ die Anzahl der r -fachen Basispunkte des Netzes ($r = 1, 2, \dots, n-1$); die Basispunkte des Netzes können beliebig sein, d. h. sie können entweder getrennt oder auch unendlich nahe beieinander liegen. Es wird aber vorausgesetzt, daß die Kurve J in den Basispunkten des Netzes sich regulär verhält; das bedeutet, daß die (effektive oder virtuelle) Multiplizität von J in einem s -fachen Basispunkte des Netzes $3s-1$ beträgt. Aus der Formel (1) folgen dann leicht die zwei wohlbekannten Cremonaschen Gleichungen:

$$\sum r^2 x_r = n^2 - 1, \quad \sum r x_r = 3(n-1),$$

und umgekehrt. — Eine zweite ebenfalls charakteristische Eigenschaft, die eine Folge der ersten ist, ist: Diejenige Gerade, welche die durch einen allgemeinen Punkt P von J hindurchgehenden Kurven des Netzes berührt, berührt in P auch die Kurve J , oder sie ist unbestimmt; falls P einem mehrfachen Teile C von J angehört, so berührt jene Gerade die Kurve C in P . E. G. Togliatti (Genova).

Chow, Wei-Liang: On the genus of curves of an algebraic system. Trans. Amer. math. Soc. 65, 137—140 (1949).

Verf. liefert einen rein algebraischen Beweis für den bekannten Satz, daß das Geschlecht einer speziellen Kurve eines algebraischen Systems algebraischer Kurven niemals größer ist als das Geschlecht der allgemeinen Kurve des Systems; ein anderer Beweis für denselben Satz wurde von B. Segre angegeben [On limits of algebraic varieties, Proc. London math. Soc. 47, 351—403 (1942)]. Der Beweis gelingt verhältnismäßig leicht mit Hilfe des vom Verf. und v. d. Waerden eingeführten Begriffes der einer algebraischen Mannigfaltigkeit oder einem algebraischen System solcher Mannigfaltigkeiten „zugeordneten Form“ [W.-L. Chow und B. L. v. d. Waerden, Math. Ann., Berlin 113, 692—704 (1937); dies. Zbl. 16, 40]. Verf. stellt die Bedingungen auf, daß eine allgemeine irreduzible Kurve von gegebener Ordnung in einem projektiven Raum das Geschlecht p besitze, d. h. für genügend große n lineare Punktscharen g_n^{n-p} enthalte. Da bei beliebiger Spezialisierung der „Koordinaten“ diese Bedingungen immer erfüllt bleiben, ist der Beweis vollständig. Gröbner.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● **Athen, H.: Vektorrechnung. (Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften.)** Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt 1948. II, 90 p. DM 5.—.

Auf knapp 90 Seiten gibt der Verf. eine Einführung in die Vektorrechnung und vermittelt die für die Anwendungen in Mathematik, Physik und Technik benötigten Kenntnisse. Von den üblichen Darstellungen im Stil nicht abweichend, bemüht sich der Verf., Grundlagen wie Zusammenhänge von verschiedenen Seiten zu beleuchten. Da eine Zusammenstellung der wichtigsten Anwendungen in einem gesonderten „Notdruck“ angekündigt wird, sind nur wenige Beispiele und Aufgaben durchgeführt. — Nach einem Kapitel über Vektoralgebra werden in zwei Kapiteln mit den Titeln „Vektorfelder und Differentialoperationen“ bzw. „Aufbau von Vektorfeldern, Beziehungen zur Potentialtheorie“ die wichtigsten Dinge der Vektoranalysis behandelt. (grad, div, rot werden erklärt, die Integralsätze von Gauß, Stokes und Green werden gebracht, Vektoroperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten, Zusammensetzung der Differentialoperationen, Zerfallung eines Vektorfeldes in wirbel- und quellenfreie Teile usw.). Schließlich bringt der Verf. in einem Abschlußkapitel zwecks Abrundung der

Vektorrechnung die Grundbegriffe der Tensoralgebra. — Die Darstellung weist an vielen Stellen Unklarheiten und Ungenauigkeiten im Ausdruck auf. Die Formulierung der Voraussetzungen, unter denen ein Satz, eine Formel oder dergleichen gilt (insbesondere die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von Vektoren in der Vektoralgebra, wie etwa auf S. 14 oder auf S. 20), fehlt oft auch dort, wo diese zumindest für den Anfänger wichtig wären. Bei Behandlung der Vektorgleichung $[\mathfrak{x}a] = b$ auf S. 22 nur die spezielle Lösung $\mathfrak{x} = [ab]/a^2$ auf Grund des weder geometrisch noch algebraisch naheliegenden Ansatzes $\mathfrak{x} = \lambda [ab]$ anzugeben, ohne ausdrücklich auf den speziellen Charakter dieser Lösung hinzuweisen, heißt wohl, sich einer unnötigen Nachlässigkeit schuldig machen.

H. R. Müller (Graz).

Lee, H. C.: Tensor invariants of Lie groups. Duke math. J. 15, 639—647 (1948).

L'au. étudie les champs de tenseurs définis sur la variété d'un groupe de Lie G et invariants par rapport à l'un des groupes de translations de G . Résultat: Soient $\omega^i(a, da) = B_\alpha^i(a) da^\alpha$, ($\lambda, \alpha = 1, \dots, r$, r nombre des paramètres de G), les formes de Pfaff de G invariantes à gauche, $B_\lambda^\alpha(a)$ les coefficients de la matrice inverse de (B_λ^i) , (qui est partout régulière); toute densité tensorielle des poids W invariante à gauche est de la forme $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} = |B_\alpha^\lambda| b_{k_1 \dots k_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} B_{\alpha_1}^{k_1} \dots B_{\alpha_p}^{k_p} \bar{B}_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots B_{\lambda_q}^{\beta_q}$, les $b_{k_1 \dots k_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$ étant des constantes arbitraires. Un théorème analogue vaut pour les tenseurs invariants à droite. La double invariance (à droite et à gauche) s'exprime par des relations linéaires entre les coefficients $b_{k_1 \dots k_p}^{\lambda_1 \dots \lambda_q}$, desquelles on peut déduire en particulier qu'une forme différentielle extérieure doublement invariante est fermée. L'au. montre ensuite que le nombre maximum de formes extérieures invariantes de degré p linéairement indépendantes mod. les formes fermées, et celui des formes fermées mod. les formes équivalentes à zéro sont les mêmes pour l'invariance à gauche que pour l'invariance à droite; mais contrairement à ce qu'il affirme, ce ne sont pas toujours des invariants topologiques de la variété de G (si G est ouvert). L'expression „formes linéairement indépendantes“ est employée dans plusieurs sens que le contexte permet toutefois de préciser aisément.

A. Borel (Zürich).

Bang, Thøger: Die Kunst, gerade Linien zu erzeugen. Mat. Tidsskr. A, København 1948, 62—71 (1948) [Dänisch].

Hjelmslev, Johannes: Über Bahnkurven für ein variables Dreieck. Mat. Tidsskr. B, København 1948, 36—40 (1948) [Dänisch].

Bahnkurven eines in seiner Ebene beweglichen Dreiecks sind die von den Ecken beschriebenen und die von den Seiten umhüllten Kurven. Verf. untersucht den Zusammenhang zwischen den Tangenten der Eckenbahnkurven und den Berührungspunkten der Seitenbahnkurven. ABC sei das Dreieck mit den Seiten a, b, c ; a_1, b_1, c_1 seien die Bahntangenten in A, B, C und A_1, B_1, C_1 die Berührungspunkte auf a, b, c . Dann besteht die Gleichung

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{\sin(ba_1)}{\sin(ca_1)} \cdot \frac{\sin(cb_1)}{\sin(ab_1)} \cdot \frac{\sin(ac_1)}{\sin(bc_1)} = 1.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für ein veränderliches ebenes Vieleck. Die Gleichungen gelten unabhängig von jeder Metrik, also ebenso wohl für die euklidische wie nichteuklidische Geometrie.

Zacharias (Quedlinburg).

Walker, A. G.: The invariants of kinematical relativity. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 38, 316—324 (1947).

Le groupe fondamental de la relativité cinématique est le groupe G_6 des mouvements dans l'espace-temps S_4 qui laissent invariantes les hypersurfaces $X = \text{const.}$ de Milne. Par suite l'A. introduit des tenseurs dits stricts qui présentent un double caractère tensoriel: le caractère habituel dans l'espace-temps et celui relatif aux transformations appartenant à G_6 . Il montre comment l'introduction de ces tenseurs éclaire, relativement aux méthodes „directes“, la recherche des invariants de la relativité cinématique de Milne et aussi de celle de Walker [Proc. London math. Soc. 48, 161—179 (1943)]. D'autre part le groupe G_6 opère transitivement sur S_3 (classes d'intransitivité définies par $X = \text{const.}$) et aussi sur l'espace Σ_3 associé au temps τ et de courbure constante. Dans ces conditions tout tenseur

strict peut s'exprimer comme tenseur de Σ_3 avec τ comme paramètre invariant. Des expressions très simples des différents invariants de Milne et Walker sont ainsi obtenues.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Müller, Hans Robert: Zyklographische Betrachtung der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie. *Mh. Math.*, Wien **52**, 337—353 (1948).

Im Interesse einer größeren Anschaulichkeit hält Verf. die vorliegende Untersuchung im Rahmen einer Beschränkung des kinematischen Geschehens auf zwei räumliche Dimensionen mit der Normierung aller Längen und Zeiteinheiten auf die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$. Damit wird die Gruppe der linearen inhomogenen Transformationen der Variablen x, y, t , die den Ausdruck $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (t_1 - t_2)^2$ invariant lassen, isomorph: (1) mit der Gruppe der Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie in der dreidimensionalen Minkowski-Welt (mit zwei räumlichen Dimensionen), (2) mit der engeren Laguerre-Gruppe der Kreisgeometrie, (3) mit der sechseparametrischen Gruppe der Bewegungen in der C -Geometrie, d. h. mit der Gruppe der projektiven Transformationen des dreidimensionalen Raumes, die den einfach ausgearteten Kegelschnitt C der Zyklographie in sich überführen und die Längen von Strecken erhalten. — Auf dieser Grundlage unterwirft Verf. physikalische Probleme einer konstruktiven Behandlung im Sinne der darstellenden Geometrie und beginnt zunächst mit einer sorgfältigen Diskussion der zyklographischen Abbildung der (dreidimensionalen) Minkowski-Welt. Im Ruhesystem K ergeben sich die folgenden Zuordnungen: Weltpunkt \rightarrow Zykel, Weltlinie \rightarrow Zykelreihe mit nullteiliger Hüllkurve, ruhender materieller Punkt \rightarrow konzentrische Zykel, gleichförmig bewegter Punkt \rightarrow lineare elliptische Zykelreihe \rightarrow rein imaginäre C -Entfernung, Weltpunkte mit raumartigen Verbindungsgeraden \rightarrow lineare hyperbolische Zykelreihe \rightarrow reelle C -Entfernung, Weltpunkte eines Lichtsignals \rightarrow verschwindende C -Entfernung. Dem Übergang von einem Intertertialsystem zu einem anderen entspricht der Übergang von einer zyklographischen Abbildung auf elliptische C -Zykel zu einer andern. Um Vergangenheit und Zukunft bei derartigen Übergängen festzuhalten, bedarf es einer invarianten Orientierung der Zeitachsen, welchen eine ebensolche Orientierung der C -Zykel entsprechen muß. — Eigenzeiten und Ruhentfernungen lassen sich auf diese Weise stets als Tangentenlängen bzw. Sehnenstücke der zugehörigen Bildzykel konstruieren. Die Gleichberechtigung verschiedener Bezugssysteme spiegelt sich dabei in der Übereinstimmung des Konstruktionsvorganges für die zugehörigen „ruhenden Beobachter“ in ihrer zyklographischen Bildebene. Auf diese Weise gewinnt Verf. die bekannten Formeln der speziellen Lorentz-Transformation auf konstruktivem Wege im Seitenriß der zyklographischen Abbildung, insbesondere auch ein Konstruktionsverfahren zur Messung von Eigenzeiten und Lorentz-Kontraktionen. Die spezielle Lorentz-Transformation

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y_1 = y, \quad t_1 = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

erscheint als Produkt zweier C -Spiegelungen. Auch das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten wird konstruktiv hergeleitet. Schließlich werden die „Hyperbelbewegungen“ mit den „ C -Krümmungskreisen“ in Korrespondenz gesetzt.

M. Pöhl (Köln).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Kasner, Edward and John de Cicco: Physical systems of curves in space. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 106—108 (1949).

In einem Vektorfeld werde dem Punkt $r(x, y, z)$ des Raumes der Kraftvektor \mathfrak{F} zugeordnet. Dann definieren Verf. ein physikalisches System von ∞^5 Kurven durch die Forderungen, daß die Schmiegungebene jedes Kurvenpunktes den Kraftvektor \mathfrak{F} enthält und daß der durch die Bewegung eines Punktes der Masse 1 längs der Kurve entstehende Druck P proportional der in Richtung der Hauptnormalen \mathfrak{N} fallenden Komponente N an \mathfrak{F} ist ($P = kN$). Nach Aufstellung der Differentialgleichungen 2. Ordnung des Kurvensystems beweisen Verf. einige Eigenschaften, z. B.: Die in gleicher Richtung (r_s) durch den Punkt r gehenden Kurven haben gemeinsame Schmiegungebene; die Mittelpunkte ihrer Schmiegungekugeln liegen auf einer Geraden G . Die zu allen Richtungen durch r gehörenden Geraden G erzeugen ein Strahlensystem Ω , das aus den Sekanten einer kubischen Kurve besteht.

W. Haack (Gandersheim).

Semin, Ferruh: Quelques remarques sur deux théorèmes classiques. *Univ. Istanbul Fac. Sci. Rec. Mém. commém. la Pose de la première Pierre des nouv. Inst.* **45—46** (1948).

Unter Verwendung des bekannten Satzes, daß der Drall einer Erzeugenden

der Binormalenfläche einer Raumkurve mit deren Torsionsradius in dem auf der Erzeugenden liegenden Kurvenpunkt übereinstimmt, beweist der Verf. den Satz von Beltrami und Enneper über den Zusammenhang zwischen Torsion der Asymptotenlinien und dem Gaußschen Krümmungsmaß der Fläche. — Weiter wird ein geometrischer Beweis für die bekannte Eigenschaft eines linearen Strahlkomplexes gegeben, durch fünf Gerade allgemeiner Lage bestimmt zu sein.

H. R. Müller (Graz).

Kruppa, Erwin: Strahlflächen als Verallgemeinerungen der Cesàro-Kurven. *Mh. Math.*, Wien **52**, 323—336 (1948).

Ist κ die Krümmung und κ_1 die Windung einer Linie, so benennt man nach Cesàro die Kurven mit einer Beziehung

$$a\kappa^2 + b\kappa\kappa_1 + c\kappa_1^2 + d\kappa + e\kappa_1 = 0.$$

Es werden hier geradlinige Flächen untersucht, die sich in ähnlicher Weise kinematisch erklären lassen wie Cesàros Kurven. Es wird ein die geradlinige Fläche begleitendes Achsenkreuz eingeführt und gefragt, wann es darin befestigte Geraden gibt, die bei dem Bewegungsvorgang des Achsenkreuzes Torsen beschreiben (also im allgemeinen Tangenten einer raumfesten Linie). Blaschke (Hamburg).

Bompiani, E.: Isometria di calotte superficiali. *Rend. Mat. sue Appl.*, Univ. Roma *Ist. naz. alta Mat.*, V. s. **7**, 274—294 (1948).

Verf. beweist zunächst, daß zwei Flächenelemente (Kalotten) 2. Ordnung immer isometrisch sind, und zwar auf unendlich viele Weisen: eine davon besteht darin, die beiden Kalotten in ihren Zentren zur Berührung zu bringen und sie dann durch Projektion von einem Punkte der gemeinsamen Normale aus aufeinander zu beziehen. Dagegen ist dafür, daß man eine Isometrie zwischen zwei Kalotten 3. Ordnung aufstellen kann, notwendig und hinreichend, daß die Kalotten 2. Ordnung, die zu ihnen gehören, dieselbe Krümmung haben. Schon aus diesen Ergebnissen geht hervor, wie der Begriff der Abwickelbarkeit für einzelne Kalotten oder für ganze Flächen sich verschieden darstellt: ein Unterschied, der auf die Tatsache zurückzuführen ist, daß für diese auch Elemente eine Rolle spielen, die davon abhängen, wie die Kalotte auf der Fläche veränderlich ist. — Verf. weist auch auf das entsprechende Problem für Kalotten 4. Ordnung hin; er beschränkt sich dabei auf Nebenfragen wie die Konstruktion von Kalotten mit vorgegebener Krümmung und der infinitesimalen isometrischen Transformationen. P. Buzano (Turin).

Abascal, E. Vidal: A generalization of Steiner's formulae. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 841—844 (1947).

Sei C eine geschlossene Kurve positiver geodätischer Krümmung auf einer Fläche der Gaußschen Krümmung K , C_ϱ ihre Parallelkurve im geodätischen Abstand $\varrho > 0$. Verf. leitet für ihre Längen L_ϱ und Fläche F_ϱ Formeln ab, die im Falle $K = \text{const} (> 0)$ so lauten:

$$L_\varrho = 2\pi \frac{\sin \varrho \sqrt{K}}{\sqrt{K}} - F \cdot \sqrt{K} \sin \varrho \sqrt{K} + L \cos \varrho \sqrt{K},$$

$$F_\varrho = L \frac{\sin \varrho \sqrt{K}}{\sqrt{K}} - 2\pi \frac{\cos \varrho \sqrt{K}}{K} - 1 + F \cos \varrho \sqrt{K}. \quad \text{Gericke (Freiburg/Br.).}$$

Sauer, Robert: Projektive Transformationen des Darbouxschen Flächenkranzes. *Arch. Math.*, Oberwolfach **1**, 89—93 (1948).

Jede infinitesimale Verbiegung einer Fläche definiert zwölf in bestimmter Weise miteinander verknüpfte Flächen (ξ^i) , (η^i) ($i = 1, 2, \dots, 6$), die man einen Darbouxschen Flächenkranz nennt. Durch Einführung Plücker'scher Linienkoordinaten (homogen, rechtwinklig) läßt sich der Flächenkranz durch 6 Sechservektoren darstellen. 4 der Sechservektoren entsprechen den Erzeugenden der W -Strahlensysteme, deren Brennflächen zum Flächenkranz gehören. Die übrigen Flächen des

Kranzes lassen sich durch 2 (nicht-singuläre) Sechservektoren darstellen, die für zwei Flächenpaare in Punktkoordinaten, für die beiden anderen in Ebenenkoordinaten gedeutet werden. Verf. beweist, daß man durch lineare Transformationen der Sechservektoren einen Darbouxschen Flächenkranz wieder in einen Darbouxschen Flächenkranz überführen kann. *W. Haack* (Gandersheim).

Fassina, María C.: Die Petersonschen Flächen. *Rev. Un. mat. Argentina* **13**, 172—182 (1948) [Spanisch].

Als Flächen Petersons werden die bezeichnet, die in Zylinderkoordinaten einer Gleichung $z = f(r) \cdot g(\vartheta)$ genügen. Über sie werden einige einfache Sätze hergeleitet in Zusammenhang mit einer Schrift von L. Bianchi, *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.* 1916. Insbesondere wird neu gezeigt, daß ∞^1 Flächen dieser Art aufeinander abwickelbar sind unter Erhaltung der Linien ϑ , $z = \text{fest}$. Ferner werden Flächen betrachtet, die sich auf mehrfache Art als solche Petersons ansehen lassen wie die Quadriken. *Blaschke* (Hamburg).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

● **Haack, W.: Differential-Geometrie. II.** Wolfenbüttel und Hannover: Wolfenbütteler Verlagsanstalt G. m. b. H. 1948 (Notdruck).

L'auteur explique comment les études de Monge, bornées aux courbes et surfaces de l'espace euclidien à 2 ou 3 dimensions avec le seul secours du calcul différentiel et intégral, ont été dépassées par l'emploi systématique de la théorie des invariants créée par Gauss, puis par les idées de Plücker, Klein et Riemann: l'espace ne se trouve plus construit avec les points (on les plans), mais aussi avec d'autres éléments tels que la droite ou la sphère. La théorie des groupes intervient soit pour la géométrie euclidienne soit pour la géométrie projective. Laguerre, Möbius, Sophus Lie nous entraînent ensuite au delà de notre représentation tridimensionnelle de l'espace et nous font aborder la géométrie à n dimensions. Mais alors, pour construire la géométrie différentielle au sens de Klein et Riemann, les méthodes élémentaires ne suffisent plus et l'emploi du calcul de Ricci permet un progrès décisif. — Le premier chapitre de cette seconde partie de la Géométrie Différentielle développe le calcul de Ricci en liaison étroite avec la théorie des surfaces; le second chapitre s'occupe des dérivées invariantes sur une surface. Les autres chapitres sont consacrés à la géométrie des droites (surfaces réglées, congruences, complexes). — Ce petit traité a été conçu dans le même esprit que ceux qui l'ont précédé dans cette collection; il permet au débutant de surmonter les difficultés qu'il éprouve à pénétrer dans les idées de Riemann, Plücker, Klein, et de se mettre en état de lire les mémoires originaux. Nous devons féliciter l'auteur du succès avec lequel il atteint son but. *B. Gambier* (Paris).

Buzano, Piero: Invarianti proiettivi di due elementi differenziali curvilinei. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I* **81/82**, 114—121 (1948).

Verf. betrachtet in einem linearen Raume S_3 zwei Linienelemente 3. Ordnung E_3 , deren Zentren, Tangenten und Schmiegebenen verschieden sind, und unterscheidet 6 Fälle nach den Inzidenzrelationen für die Tangenten und die Schmiegebenen. In jedem Falle werden die projektiven Invarianten der Konfiguration der beiden E_3 bestimmt und für die bemerkenswertesten unter ihnen auch die geometrischen Bedeutungen angegeben. *Mario Villa* (Bologna).

Buzano, Piero: Osservazioni intorno agli invarianti proiettivi di elementi curvilinei. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I* **81/82**, 109—113 (1948).

Verf. betrachtet in einem linearen Raume S_3 drei Linienelemente 2. Ordnung E_2 und bestimmt die 6 projektiven Invarianten der von ihnen gebildeten Konfiguration; er gibt auch ihre geometrischen Bedeutungen an. *Mario Villa*.

Longo, Carmelo: Sugli elementi curvilinei piani E_3 con lo stesse E_1 . Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 108—111 (1948).

Verf. betrachtet die ∞^2 Elemente 3. Ordnung E_3 mit gegebenem Zentrum $(0, 0)$ und gegebener Tangente $y = 0$, die also eine Gleichung vom Typus

$$a_0 y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4]$$

haben und bildet sie auf die Punkte einer Ebene ab, indem er a_0, a_2, a_3 als homogene projektive Koordinaten nimmt. Die Systeme von $\infty^1 E_3$, die man erhält, indem man die Gleichungen von zwei von ihnen linear kombiniert (und die Verf. Büschel nennt), werden durch Geraden dargestellt, während die Homographien, die das Zentrum O und die Tangente $y = 0$ fest lassen, auf der Bildebene quadratische Transformationen induzieren. Verf. scheint nicht nach einem Zusammenhang zwischen seiner Arbeit und einer Arbeit von Bompiani [Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 7, 124—168 (1948)] gesucht zu haben.

P. Buzano (Turin).

Bompiani, E.: Monoidi del 3° ordine per una calotta superficiale del 4° ordine. Mh. Math., Wien 52, 190—193 (1948).

Wenn ein Flächenelement (Kalotte) 4. Ordnung σ_4 mit dem Zentrum O gegeben ist, existieren ∞^4 kubische Flächen, die es enthalten; eine spezielle von ihnen erhält man, wenn man einen Doppelpunkt außerhalb der Tangentenebene in O vorschreibt. Soll der Doppelpunkt ein biplanarer Punkt werden, so muß man ihn auf einer wohlbestimmten Fläche 4. Ordnung wählen; unter den ∞^2 Monoiden, die man so erhält, zeichnet Verf. eines aus durch die Forderung, daß der Schnitt einer der Tangentenebenen in dem biplanaren Punkt mit der Tangentenebene in O die Darbouxssche Polare der Verbindungslinie von O mit dem biplanaren Punkt sein soll. — Das Bezugstetraeder, bezüglich dessen σ_4 durch die kanonische Entwicklung

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)(\alpha x + \beta y) + \dots$$

dargestellt wird, erhält so eine neue geometrische Charakterisierung, insofern als sein der Tangentenebene $z = 0$ gegenüberliegender Eckpunkt mit dem biplanaren Doppelpunkt des eben erwähnten Monoids zusammenfällt. *P. Buzano (Turin).*

Su, Buchin: Alcuni invarianti di contatto di due varietà in uno spazio proiettivo. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 9—12 (1947).

Verf. erweitert auf ein Paar von m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten seine früheren Ergebnisse bez. der Berührungsinvarianten zweier Kurven eines S_n , die einen Punkt und die entsprechenden Schmiegräume bis zum S_k gemeinsam haben [Vgl. Verf., On certain tac-invariants of two curves in a projective space, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 17, 116—118 (1946).] *P. Buzano (Turin).*

Longo, C.: Supra una classe di varietà che ammettione varietà subordinate quasi-asintotiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 19—24 (1948).

Eine in einer Mannigfaltigkeit V_k gelegene Mannigfaltigkeit V_h ($h < k$) heißt eine Quasiasymptotik σ_{rs} ($0 < r < s$) für V_k , wenn der Schmiegraum $S(r)$ an V_k in einem Punkte der V_h und der Schmiegraum $S(s)$ an V_h in diesem Punkte einen Verbindungsraum haben, dessen Dimension kleiner ist als die Dimension, die man für eine allgemeine V_h von V_k erhielte. Ref. hat [dies. Zbl. 24, 173] für die quasiasymptotischen Mannigfaltigkeiten ($h > 1$) eine neue projektive charakteristische Eigenschaft, die Art (specie), eingeführt, die von der Dimension des oben erwähnten Verbindungsraums abhängt. Man kennt wenige Beispiele von V_k , die quasiasymptotische V_h mit $h > 1$ besitzen. Ein Beispiel ist von Bogdan [dies. Zbl. 18, 375] gegeben worden, andere vom Ref. [dies. Zbl. 24, 173; Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur. 1941; Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fisic. 1942, 1943]. Verf. verallgemeinert das Ergebnis von Bogdan.

Mario Villa (Bologna).

Villa, Mario: *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 188—195 (1947).

Es seien T_1, T_2 zwei eindeutige Transformationen zwischen zwei Räumen S_r, S'_r , die den Punkt O in denselben Punkt O' überführen; es wird vorausgesetzt, daß die Umgebungen 1. Ordnung von T_1, T_2 im Punktepaar O, O' zusammenfallen, d. h. daß T_1 und T_2 dieselbe Homographie zwischen den Bündeln O, O' bestimmen. Es gibt dann im allgemeinen $2^r - 1$ von O (oder O') ausgehende Elemente 1. Ordnung E_1 , so beschaffen, daß jedes E_1 enthaltende Element 2. Ordnung von T_1 und T_2 in dasselbe Element transformiert wird; die Richtungen solcher E_1 werden Oskulationsrichtungen von T_1 und T_2 im Punktepaar O, O' genannt. Wenn T_2 eine Homographie ist, so fallen die Oskulationsrichtungen von T_1, T_2 mit den charakteristischen Richtungen von T_1 zusammen. — Allgemeiner, wenn T_1, T_2 im Punktepaar O, O' dieselbe Umgebung der Ordnung s aufweisen, dann gibt es im allgemeinen $\frac{(s+1)^r - 1}{s}$ Hyperoskulationsrichtungen, d. h. von O (oder O') ausgehende Elemente 1. Ordnung E_1 , so daß jedes E_1 enthaltende Element der Ordnung $s+1$ von T_1 und T_2 in dasselbe Element transformiert wird. — Schließlich zwei Anwendungen: 1. Wenn die charakteristischen Geraden einer Transformation T in O, O' unbestimmt sind, so daß T in O, O' von einer Homographie Ω oskuliert wird, dann liefern die Hyperoskulationsrichtungen von T, Ω in O, O' gewisse $\frac{1}{2}(3^r - 1)$ Richtungen, die Verf. als charakteristische Richtungen 2. Art von T in O, O' bezeichnet; 2. Die Hyperoskulationsrichtungen einer allgemeinen Transformation T und einer T oskulierenden Cremonaschen Transformation T_r der Ordnung r sind wieder $\frac{1}{2}(3^r - 1)$ und beschreiben, bei veränderlicher T_r , ein System mit der Dimension $\frac{1}{2}r^2(r-1)$.
E. G. Togliatti (Genova).

Vaona, Guido: *Elementi differenziali d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 40—46 (1948).

Ref. hat (s. vorsteh. Referat) folgendes bewiesen: Wenn zwischen zwei linearen Räumen S_r, S'_r ($r > 1$) zwei Punkttransformationen T_1, T_2 gegeben sind, die in einem regulären Punktepaar (O, O') dieselbe Umgebung der Ordnung $s > 0$ haben, so gibt es im allgemeinen $[(s+1)^r - 1]/s$ E_1 mit dem Zentrum O (oder O') von der Eigenschaft, daß jedes E_{s+1} , das eines von ihnen enthält, sowohl durch T_1 als auch durch T_2 in dasselbe E_{s+1} transformiert wird. Verf. gibt, unter Benutzung dieses Satzes selbst, eine Erweiterung des Satzes, indem er beweist: Wenn zwei Punkttransformationen T_1, T_2 unter den oben genannten Bedingungen gegeben sind, gibt es im allgemeinen $[(s+1)^r - 1]/s$ E_k mit dem Zentrum O (oder O') von der Eigenschaft, daß jedes E_{s+k} , das eines von ihnen enthält, sowohl durch T_1 als auch durch T_2 in dasselbe E_{s+k} transformiert wird. Verf. weist schließlich auf einige Anwendungen hin.

Mario Villa (Bologna).

Degoli, Lando: *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 217—221 (1947).

Es sei T eine Transformation zwischen zwei dreidimensionalen Räumen S_3, S'_3 ; und es sei O, O' ein Paar entsprechender Punkte allgemeiner Art. Es gibt dann, wie bekannt, 7 Paare entsprechender charakteristischer Geraden, die von O, O' ausgehen. Verf. wählt als Koordinatenebenen in S_3 drei Ebenen durch O , die je zwei charakteristische Geraden enthalten, und entsprechend in S'_3 ; er gibt dann die Gleichungen der Transformation in der Umgebung des Paares O, O' , die Gleichungen der einzelnen charakteristischen Richtungen und diejenigen der charakteristischen Projektivitäten an. Er zeigt noch, wie die metrischen Invarianten von T im Paar O, O' berechnet werden könnten. Die Gleichungen von T , projektiv be-

trachtet, können noch weiter vereinfacht werden, wenn die Einheitspunkte der zwei Koordinatensysteme auf der siebenten charakteristischen Geraden gewählt werden.

E. G. Togliatti (Genova).

Bol, Gerrit: Eilinen und sextaktische Punkte. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 94—101 (1948).

L'A. ritiene che, a differenza di quanto si suole fare nelle geometrie euclidea ed affine, nello studio proiettivo differenziale delle curve piane non sia consigliabile la scelta di un parametro privilegiato (arco proiettivo) e preferisce vincolare solo la normalizzazione delle coordinate omogenee del punto $x(t)$ alla scelta del parametro in modo che risulti sempre $(x \ x' \ x'') = 1$; ne segue che il punto $x(t)$ soddisfa all'equazione differenziale: $x''' = 2ax' + cx$. Dette allora p_0, p_1, p_2 le coordinate proiettive omogenee di un generico punto P nel riferimento locale di vertici $x, x', x'' - ax$, si ottiene per la conica osculatrice l'equazione: $2p_0 p_2 - p_1^2 = 0$ e in pari tempo si trova che i punti sestatici (in cui detta conica ha contatto superiore all'ordinario) sono caratterizzati dalla condizione $b = c - a' = 0$. L'A. conviene che questa prima parte del suo lavoro si segnali più per il metodo che per i risultati i quali non sono del tutto nuovi [cfr. E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris 1937, Chap. II; questo Zbl. **16**, 76]. — Nella parte successiva, utilizzando le formule di Frenet per i vertici del suo riferimento locale, l'A. dimostra che se $f(x_0, x_1, x_2)$ è un qualsiasi polinomio omogeneo di 2° grado a coefficienti costanti, l'integrale esteso a una curva chiusa $\oint f(x_0, x_1, x_2) b \, dt$ è nullo: supposto allora che la curva chiusa sia tale che ogni retta del piano l'incontri al più in due punti (ovale) — con procedimento analogo a quello seguito da Herglotz nella dimostrazione del teorema dei 4 vertici di un'ovale — ne deduce che il numero dei punti sestatici ossia il numero dei cambiamenti di segno di $b(t)$ è almeno uguale a sei. Una notevole generalizzazione viene fatta a un arco di curva (senza flessi) incontrato al più in due punti da ogni retta: se le coniche osculatrici nei due estremi coincidono esso ha almeno 5 punti sestatici. *P. Buzano*.

Bol, Gerrit: Einige neue Ergebnisse aus der Differentialgeometrie der Raumkurven im dreidimensionalen projektiven Raum. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 3—8 (1948).

Mentre l'ordinaria geometria proiettiva differenziale delle curve sghembe fa ricorso alla scelta simultanea del fattore di proporzionalità per le coordinate omogenee del punto $x(t)$ e del parametro (arco proiettivo), l'A. del presente lavoro segue una nuova via consistente nel fissare solo la normalizzazione delle coordinate omogenee mediante la condizione $(xx'x''x''') = \text{cost.}$: ne deriva che il punto $x(t)$ soddisfa a un'equazione differenziale del 4° ordine equivalente a un sistema del tipo:

$$x' = x_1, \quad x'_1 = x_2 + 3ax, \quad x'_2 = x_3 + 4ax_1 + bx, \quad x'_3 = 3ax_2 + bx_1 + cx.$$

Questo è interpretabile come sistema delle formule di derivazione per il tetraedro mobile $xx_1x_2x_3$ associato al punto $x(t)$. Dal fatto — finora inosservato — che le quantità $x, x_1, x_2, x_3, a, b, c$ si trasformino molto semplicemente per l'introduzione di un nuovo parametro t^* l'A. deduce che in ogni punto della curva la posizione del nuovo tetraedro associato dipende solo dal valore di:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\varphi'}{\varphi} \quad \text{dove} \quad \varphi(t) = \frac{dt^*}{dt}.$$

La totalità dei tetraedri associati alla curva in tutti i suoi punti dipende quindi dai due parametri A e t : assegnando una relazione $A = F(t)$ si viene a determinare per ogni scelta del parametro un tetraedro associato per ciascun punto della curva. La totalità di detti tetraedri costituisce un sistema di riferimento corrispondente al parametro scelto e a tutti quelli che ne derivano attraverso sostituzioni lineari intere. Particolarità proiettive concernenti la curva o la scelta del parametro su di essa vengono messe in relazione con proprietà delle superficie descritte, al

variare di A e t , dai vertici del tetraedro nonchè delle congruenze descritte dagli spigoli del medesimo.

P. Buzano (Torino).

Bol, Gerrit: Zur Projektivgeometrie der Flächenstreifen. Arch. Math., Oberwolfach 1, 192—199 (1949).

L'A. si propone con questo lavoro di premettere alla geometria proiettiva differenziale delle superficie lo studio proiettivo di una striscia, ossia di una curva sghemba a ciascun punto $x(t)$ della quale è associato un piano $X(t)$ contenente la tangente in quel punto: ciò nel campo metrico è già stato fatto vantaggiosamente da Blaschke. — Il procedimento seguito da Bol è analogo a quello già usato da lui stesso nello studio di curve piane e sghembe (cfr. le preced. recens.): esso si fonda sulla normalizzazione simultanea delle coordinate del punto $x(t)$ e del piano $X(t)$, in modo che oltre alle condizioni di incidenza:

$$Xx = 0, \quad X'x = 0, \quad Xx' = 0$$

valgano anche le:

$$X'x' = -1, \quad X'x'' = 0.$$

Posto allora $X''x'' = 2a$ e detti Z e z rispettivamente il piano osculatore alla curva luogo del punto $x(t)$ e il suo duale, i punti: $x, x', x'' - ax, z$ e i piani: $X, X', X'' - aX, Z$ sono i vertici e le facce di un tetraedro che l'A. utilizza come riferimento mobile nello studio della striscia, assegnandone le formule di derivazione. In detto riferimento determina le equazioni della conica osculatrice alla striscia, del cono osculatore e della quadrica osculatrice (avente con la striscia contatto del 3° ordine) caratterizzando i casi speciali in cui detti enti sono fissi al variare del punto $x(t)$: nel caso più generale invece in cui risultano variabili lungo la striscia l'A. studia le superficie da essi descritte o rispettivamente involupate.

P. Buzano (Torino).

Pantazi, Al.: Sur les variétés non-holonomes à asymptotiques rectilignes et leur déformation projective. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 3—26 (1947).

La ricerca, condotta col metodo del riferimento mobile di Cartan, tende a stabilire l'effettiva deformabilità di particolari varietà anolonyme con asintotiche rettilinee: premesso che se una varietà siffatta è a curvatura principale costante, tale sarà pure ogni altra varietà con asintotiche rettilinee applicabile su quella, l'A. prova che una corrispondenza fra le due è un' applicabilità proiettiva qualora conservi le asintotiche. A causa della complicazione dei calcoli l'A. si limita poi a studiare un caso particolare delle varietà predette, caso in cui la varietà ammette un gruppo a 8 parametri di trasformazioni in sè conservanti le asintotiche e di conseguenza un gruppo dello stesso ordine di deformazioni proiettive in sè: egli prova che dette deformazioni sono effettive, ossia non si riducono a semplici trasformazioni omografiche e stabilisce inoltre che le varietà in esame si riducono a 6 tipi ben determinati.

P. Buzano (Torino).

Bors, Const.: Sur les courbes concurrentes dans la géométrie centro-affine. Bull. Ecole Polytechn. Jassy 2, 71—78 (1947).

Die betrachteten Kurven sind so aufeinander bezogen, daß entsprechende Punkte x, \bar{x} festen „Abstand“ und die Tangenten in entsprechenden Punkten einen festen „Winkel“ bilden. Als „Abstand“ und „Winkel“ werden bekannte Invarianten gegenüber unimodularen radialen Affinitäten eingeführt. Ist σ der Affinbogen von x bei diesen Affinitäten, so ist die zu x konkurrente Kurve \bar{x} durch eine Gleichung der Form bestimmt:

$$\bar{x} = a \frac{dx}{d\sigma} + \varphi(\sigma) x, \quad (a = \text{konstanter Abstand}),$$

wobei φ der Riccatischen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} + \frac{b}{1-a\varphi} \varphi^2 - aK = 0$$

(b = konstanter Winkel, K entsprechende Affinkrümmung von x). Es werden Beziehungen zwischen den radial-affinen Krümmungen und Affinbogen von x und \bar{x} abgeleitet und eine Reihe von Sonderfällen betrachtet, z. B. Parabelkurven, homothetische Kurven. Süss (Freiburg i. Br.).

Schul'man, T. A.: Über Verbiegung von Hyperflächen im affinen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 1297—1299 (1947) [Russisch].

In jeder berührenden Hyperebene E einer Hyperfläche F des affinen R^{n+1} seien n linear unabhängige Vektoren e_1, e_2, \dots, e_n gegeben, die in E eine Inhomogenität induzieren. Für die Normalvektoren von F wird gefordert, daß bei Projektion einer benachbarten E in Richtung von e_{n+1} auf die ursprüngliche E der Inhalt im benachbarten E gleich dem Inhalt seiner Projektion in der Ausgangs- E ist. Hierdurch wird dem Zusammenhang eine Bedingung auferlegt. Die so bestimmten Normalen heißen äqui-affin. Die gewöhnlichen Affinormalen sind z. B. äqui-affin. Ein Paar von Hyperflächen heißt aufeinanderlegbar, wenn sie sich punktweise so aufeinander beziehen lassen, daß dabei mindestens ein durch äqui-affine Normalen vermittelter Zusammenhang übereinstimmt. Es sollen solche Paare von Hyperflächen mit ihren Bezugssystemen aufgefunden werden. Abgesehen von dem Fall der Affingeometrie auf der Hyperfläche und von dem Fall aufeinander abwickelbarer Hyperflächen sind für $n > 2$ i. a. die Hyperflächen nicht aufeinanderlegbar. Eine Ausnahme bildet eine besondere Klasse von ineinander verbiegbaren Hyperflächenpaaren, die mit den entsprechenden Bezugssystemen von einer Funktion von n Veränderlichen abhängt. Süss (Freiburg i. Br.).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Gólab, St.: Sur la théorie des objets géométriques. Ann. Soc. Polonaise Math. 19, 7—35 (1947).

Ein geometrisches Objekt der Klasse v mit einer Bestimmungszahl in einem eindimensionalen Raum ist definiert durch die Transformationsgleichung

$$\Omega_2 = f(\Omega_1, \xi^1, \varphi(\xi^1), \dots, \varphi^{(v)}(\xi^1))$$

bei der Koordinatentransformation $\xi^1 \rightarrow \varphi(\xi^1)$ [J. A. Schouten und J. Haantjes, Proc. London math. Soc., II. s. 42, 356—376 (1937); dies. Zbl. 16, 135]. Fehlen in dieser Gleichung ξ^1 und $\varphi(\xi^1)$, so heißt das Objekt ein reines Differentialobjekt [vgl. Verf., Über die Klassifikation der geometrischen Objekte, Math. Z. 44, 104—114 (1938)]. Hier werden die Fälle $v = 2$ und $v = 3$ behandelt. Für $v = 2$ wird bewiesen, daß f der Funktionalgleichung

$$f(x, \beta_1 \alpha_1, \beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2) = f\{f(x, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2\}$$

genügt und daß jedes reine Differentialobjekt der Klasse 2 eine monotone Funktion ist eines „einfachen“ Objektes zweiter Klasse mit der Transformationsweise

$$\Omega_2 = \Omega_1/\varphi' - \varphi''/\varphi'^2,$$

das Parameter einer affinen Übertragung ist. Ebenso wird bewiesen, daß ein reines Differentialobjekt der Klasse 3 eine monotone Funktion ist eines „einfachen“ Objektes mit der Transformationsweise

$$\Omega_2 = \Omega_1/(\varphi')^2 - \frac{3}{2} \varphi''^2/\varphi'^4 + \varphi'''/\varphi'^3.$$

Die erhaltenen Formeln sind nahe verwandt mit den Cartanschen Untersuchungen über holodrisch isomorphe Gruppen [Ann. sci. Ecole norm. sup., III. s. 21, 153—206 (1904); 22, 219—308 (1905)]. Eine Erörterung der geometrischen Natur der einfachen Objekte dritter Klasse wird in Aussicht gestellt. Ebenso der Beweis, daß es in einem eindimensionalen Raum keine reinen Differentialobjekte mit einer Bestimmungszahl von einer Klasse größer als drei geben kann. Schouten (Epe/Holland).

Golab, St.: Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 120—122 (1948).

Dies soll eine Übersicht sein über die wirklich sehr interessanten Resultate des Verf. und seiner Schüler aus der Theorie der geometrischen Objekte. Diese Resultate werden aber nur ganz kurz und ohne Formeln angedeutet, und jede Literaturangabe fehlt. Instanzen gegenüber, die fortwährend auf Einschränkung drängen, sollte doch immer wieder energisch darauf hingewiesen werden, daß dermaßen übertrieben komprimierte mathematische Veröffentlichungen vollkommen wertlos sind und nur Papierverschwendung bedeuten.

Schouten (Epe/Holland).

Wang, Hsien-Chung: Axiom of the plane in a general space of paths. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 731—737 (1948).

Mit Hilfe des Begriffes der totalgeodätischen Fläche hat E. Cartan die dreidimensionalen Riemannschen Räume konstanter Krümmung folgendermaßen charakterisiert. Existiert im dreidimensionalen Riemannschen Raum in jedem Punkte zu jeder beliebigen Ebenenstellung eine totalgeodätische Fläche, dann ist der Raum von konstanter Krümmung. Verf. verallgemeinert diesen Satz für die allgemeinen Räume der Bahnen („paths“). Das Gegenstück der totalgeodätischen Fläche wird dabei folgendermaßen definiert. Eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit S wird in einem Punkte P_0 „eben“ genannt (subspace flat at P_0), wenn sämtliche Bahnen, die eine k -Richtung berühren, S angehören. S heißt „totalebene“ (totally flat), wenn sie in jedem Punkte eben ist. Verf. bezeichnet die Voraussetzung, daß in jedem Punkte zu jeder k -Richtung eine totalebene k -dimensionale Mannigfaltigkeit existiert, als das Ebenenaxiom, und beweist folgenden Satz: Ist in einem allgemeinen Raum der Bahnen das Ebenenaxiom erfüllt, dann ist der Raum projektiv-eben. Mit Hilfe dieses Satzes kann Verf. auch die projektive Ebenheit von K -spreads charakterisieren.

O. Varga (Debrecen).

Vranceanu, G.: Sur les espaces partiellement projectifs. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 43—64 (1947).

Gibt es für einen n -dimensionalen, affinzusammenhängenden Raum A_n mit symmetrischer Übertragung ein Koordinatensystem von der Art, daß von den $(n-1)$ Gleichungen, die eine beliebige geodätische Linie charakterisieren, k linear sind, so heißt der Raum nach B. Kagan k -fach projektiv. Ein $(n-2)$ -fach projektiver Raum, für den sämtliche von den zuvor erwähnten durch lineare Gleichungen charakterisierbaren (jetzt zweidimensionalen) Flächen durch ein und denselben Punkt gehen, heißt nach Kagan subprojektiv. Verf. betrachtet Räume, die $(n-m-1)$ -fach projektiv sind und folgender, der Kaganschen entsprechenden Bedingung genügen: Man kann den A_n so auf einen Euklidischen E_n abbilden, daß 1. die den geodätischen Linien entsprechenden Kurven auf einer E_{m+1} liegen, 2. sämtliche E_{m+1} ein und denselben E_{m-1} enthalten, der insbesondere in der uneigentlichen Hyperebene liegen kann. Verf. gibt in Verallgemeinerung der Kaganschen Formeln Ausdrücke für die Übertragungsparameter an, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß ein $(n-m-1)$ -dimensionaler Raum die Bedingungen 1., 2. erfüllt. Verf. charakterisiert diesen Fall auch in invarianter Weise durch Relationen, in denen der Krümmungsaffinor des A_n auftritt. Weiter werden Riemannsche Räume V_n angegeben, die $(n-m-1)$ -fach projektiv sind und die Bedingungen 1., 2. erfüllen. Diese Räume besitzen das Bogenelement

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} dx^i dx^j + \sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n'} a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

wobei die a_{ij} nur von den x^1, x^2, \dots, x^m abhängen und $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ konform zu einer Metrik konstanter Krümmung $b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ ist, für die die $b_{\alpha\beta}$ noch gewissen Nebenbedingungen genügen. Schließlich betrachtet Verf. auch allgemeine $(n-2)$ -fach projektive Räume, für die nur die Bedingung 1. gilt. Die Bedingung dafür,

daß einem A_n diese Eigenschaft zukommt, hängt davon ab, ob gewisse Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Übertragungsparameter lösbar sind.

O. Varga (Debrecen).

Jordan, P.: Über den Riemannschen Krümmungstensor. I. Einsteinsche Theorie. Z. Physik **124**, 602—607 (1948).

Bref exposé didactique à l'usage des physiciens des éléments essentiels de la géométrie riemannienne. La méthode employée pour introduire la dérivation absolue est la méthode classique des coordonnées normales. Lichnerowicz (Strasbourg).

Jordan, P.: Über den Riemannschen Krümmungstensor. II. Eddingtonsche und Schrödingersche Theorie. Z. Physik **124**, 608—613 (1948).

Ce second papier est consacré à une esquisse d'étude des espaces d'Eddington et de Schrödinger, les connexions correspondantes étant caractérisées, parmi les connexions affines, par leurs propriétés axiomatiques habituelles, connexion euclidienne dans un cas, absence de torsion dans l'autre. Lichnerowicz (Strasbourg).

Ludwig, Günther: Zur projektiven Relativitätstheorie mit variabler Gravitationsinvarianten. I.: Beschreibung der projektiven Metrik durch Fünfbeine. Z. Physik **124**, 450—457 (1948).

L'A. donne un nouvel exposé mathématique de la théorie unitaire de Jordan-Thiry en introduisant les transformations linéaires orthogonalisant la „métrique projective“. L'exposé est élégant. La dénomination de „projective“, couramment utilisée, semble regrettable au rapporteur; car il ne s'agit pas, à proprement parler, au point de vue géométrique de connexion projective, mais seulement affine ou euclidienne. C'est seulement la relation d'équivalence choisie entre les points de l'espace à 5 dimensions (coordonnées homogènes) qui fait illusion. L'A. introduit les éléments essentiels permettant d'atteindre les deux champs, donne la définition de la différentielle absolue et du tenseur de courbure de l'espace pentadimensionnel et le traduit, par sa méthode générale, en termes d'espace à connexion affine à 4 dimensions.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Ludwig, Günther: Zur projektiven Relativitätstheorie mit variabler Gravitationsinvarianten. II. Variationsprinzipien und Feldgleichungen für Gravitation und Materie. Z. Physik **125**, 545—562 (1949).

Suite du papier précédent. L'A. forme, au moyen d'un principe variationnel, les 15 équations régissant le champ gravitationnel, le champ électromagnétique (équations de Maxwell généralisées) et l'invariant de gravitation. Ces équations ont d'ailleurs été formées indépendamment par Yves Thiry [ce Zbl. **30**, 280] par une méthode qui semble plus simple que celle de l'A. et qui montre bien qu'il n'y a en fait rien d'essentiellement projectif dans cette théorie. Il s'agit seulement ici d'une métrique qui en induit une autre par „fibration“. Une application intéressante est donnée par l'A. à la construction d'un modèle cosmologique. Lichnerowicz.

Trabant, E. A.: Some interesting Riemann spaces. Rev. Ci., Lima **50**, 171 bis 180 (1949).

Ist das Bogenelement eines Riemannschen Raumes durch $ds^2 = f(x^k) \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ ($k = 1, 2, \dots, n$) bestimmt, dann untersucht Verf., unter welchen Bedingungen 1. der Raum von konstanter Krümmung ist; 2. ein Einsteinscher Raum ist; 3. konformeuklidisch ist. Die Ableitungen werden nur für $n = 3$ und $n = 4$ durchgeführt und für allgemeines n die Resultate bloß angegeben. Die dritte Frage ist trivial, weil nach der Definition der konformen Abbildung der V_n bei beliebigen $f(x)$ konformeuklidisch ist und nicht bloß, wie Verf. angibt, für einen V_n konstanter Krümmung. 1. führt natürlich auf die schon von Beltrami angegebene kanonische Form des Bogenelementes einer Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung. Diese sind dann gleichzeitig die Einsteinschen Räume. Endlich wird gezeigt, daß ein dreidimensionaler Raum mit dem Bogenelement $ds^2 = A(x^k) ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2)$

$+ B(x^k) dx^2 dx^3$, wobei $A(x^k) \equiv B(x^k)$ vorausgesetzt ist, nicht von konstanter Krümmung sein kann. O. Varga (Debrecen).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Zwirner, G.: Alcuni teoremi di geometria infinitesimale diretta relativi alle curve speciali. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 113—116 (1948).

Fortsetzung einer früheren Note [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 524—530 (1948); dies. Zbl. 31, 79]. Es wird vor allem gezeigt: Es sei $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$, Parameterdarstellung eines einfachen, ebenen stetigen Bogens B , der in jedem Punkt (genau) eine Tangente besitzt. Ferner sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ und $f(z(t))$ stetig für jedes $t \in I$. Wenn dann $[f(z(t+h)) - f(z(t))]: [z(t+h) - z(t)] \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ und für jedes $t \in I$, so ist $f(z) = \text{konst. auf } B$. Haupt (Erlangen).

Santaló, L. A.: Über die Verteilung von Ebenen im Raume. Rev. Un. mat. Argentina 13, 120—124 (1948) [Spanisch].

In Verallgemeinerung einer von S. Goudsmit, Rev. modern Physics 17, 321 (1945) behandelten ebenen Aufgabe wird bewiesen: Der Raum sei durch beliebige Ebenen in Gebiete zerlegt, deren Inhalt v den Mittelwert s hat, dann ist der Mittelwert von v^2 gleich $4\pi^2:3$. Beim Beweis stützt sich der Verf. auf frühere eigene Ergebnisse. Blaschke (Hamburg).

Süss, Wilhelm: Über eine Affinvariante von Eibereichen. Arch. Math., Oberwolfach 1, 127—128 (1948).

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von B. H. Neumann, J. London math. Soc. 14, 262—272 (1939); dies. Zbl. 26, 359 wird bewiesen: Für jeden Innenpunkt X eines Eikörpers im R_n sei $m(X)$ das Minimum der Streckenverhältnisse $PX:PP'$ aller durch X gelegten Sehnen PP' des Eikörpers, und M sei das Maximum von $m(X)$ für alle X . Dann gilt $1/(n+1) \leq M \leq 1/2$. Die Gleichheitszeichen kennzeichnen dabei einerseits die Simplexe, andererseits die Eikörper mit Mittelpunkt. Blaschke (Hamburg).

Kneser, Martin: Eibereiche mit geraden Schwerlinien. Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 97—98 (1949).

Ein einfacher Beweis ohne differentialgeometrische Hilfsmittel für den Satz: Unter allen ebenen konvexen Bereichen sind die Ellipsen dadurch ausgezeichnet, daß sie gerade Schwerlinien haben. Gericke (Freiburg/Br.).

Goldberg, Michael: Circular-arc rotors in regular polygons. Amer. math. Monthly 55, 393—402 (1948).

Unter „Rotor“ eines Polygons ist eine Eikurve zu verstehen, für die nach jeder Drehung genau eine Translation möglich ist, so daß sie vom Bereich des Polygons bedeckt wird. (Man kann diesen Begriff noch wesentlich verallgemeinern, indem das Polygon durch irgendeine geschlossene Kurve ersetzt wird.) Verf. untersucht die aus Kreisbögen zusammengesetzten Rotoren regulärer Polygone. Nachdem bereits Fujiwara einen solchen Rotor für das Fünfeck beschrieben hat, werden vom Verf. alle Kreisbogenrotoren für die regulären Polygone beschrieben. Leider ergibt sich keine markante Kennzeichnung. Bückner (Minden/Westf.).

Fejes Tóth, László: Approximation by polygons and polyhedra. Bull. Amer. math. Soc. 54, 431—438 (1948).

Bezeichne J eine Kurve im Raum, P_n ein eingeschriebenes Polygon, $\eta(P_n, J)$ die Abweichung der beiden Kurven. Verf. definiert $a = (\liminf n^2 \eta(P_n, J))^{-1}$ als Grad der Approximierbarkeit von J durch Polygone. Er zeigt, daß

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{8} \left(\int_0^l |G(s)|^{\frac{1}{2}} ds \right)^2$$

gilt, wo $G(s)$ (stetig) die Krümmung, s die Bogenlänge von J bezeichnet. Daraus folgt, daß a bei gegebener Länge und Gesamtkrümmung sein Minimum beim Kreisbogen erreicht. Es gelten ähnliche Resultate bezüglich Approximierbarkeit durch „Kreisbogen-Polygone“ (Extremal: Spirale von Cornu). Für Ovale gilt ebenfalls eine Integralformel (G wird durch die Gaußsche Krümmung ersetzt), woraus sich nun die Extremaleigenschaft der Kugelfläche ergibt. Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß eine solche Formel für hyperbolisch gekrümmte Flächen nicht gültig sein kann. Anwendungen: Dichtigkeitsfragen bezüglich sphärischer Punktmengen.

Fáry (Paris).

Fejes Tóth, László: An inequality concerning polyhedra. Bull. Amer. math. Soc. 54, 139—146 (1948).

Bezeichne V_n, v_n die Volumina zweier Ellipsoide, die ein gegebenes n -eckiges (n -seitiges) Polyeder enthalten, bzw. in ihm enthalten sind. Verf. zeigt

$$\frac{V_n}{v_n} \geq 3^{\frac{1}{n}} \tan^3 \frac{n\pi}{(n-2)6};$$

für $n = 4, 6, 12$ und asymptotisch gilt das Gleichheitszeichen. Der Satz bezüglich des n -seitigen Polyeders wird auf den anderen zurückgeführt durch das Lemma: Wenn die Ellipsoide V_1, V_3 polarreziprok bezüglich V_2 sind, dann hat man $V_3/V_2 \geq V_2/V_1$ (V_i bedeutet auch das Volumen von V_i). Anwendungen: Dichtigkeit von Kreismengen in der Ebene usw.

Fáry (Paris).

Blumenthal, Leonhard M.: Metric methods in linear inequalities. Duke math. J. 15, 955—966 (1948).

Es bezeichne $P(c_0, \dots, c_n)$ mit $\sum_0^n c_i^2 = 1$ mit kartesischen Koordinaten c_i einen Punkt der n -dimensionalen Einheitssphäre S . Ferner sei C eine Teilmenge von S . Verf. betrachtet das folgende System linearer Ungleichungen: Es sei $\sum_0^n c_i x_i \geq 0$ für alle $P \in C$. — Die nichttrivialen Lösungen $X(x_0, \dots, x_n)$ werden so normiert, daß $\sum_0^n x_i^2 = 1$ ist, so daß jeder Lösung ein Punkt X der Sphäre S entspricht. Der Gesamtheit aller Lösungen entspricht die Teilmenge $\Sigma(C)$ von S . — $\Sigma(C)$ ist identisch mit der Menge der Mittelpunkte derjenigen abgeschlossenen Halbsphären (Kalotten vom Radius $\pi/2$), welche C überdecken. Ausgehend von dieser naheliegenden geometrischen Interpretation leitet Verf. verschiedene z. T. sehr einfach verifizierbare Eigenschaften der Lösungsmenge $\Sigma(C)$ ab. So ist diese abgeschlossen und (sphärisch) konvex. Bezeichnet C^* die abgeschlossene konvexe Hülle von C , so gilt $\Sigma(C) = \Sigma(C^*)$. Einige Begriffe und Resultate der „distance geometry“ des Verf. [dies. Zbl. 19, 329] werden beansprucht. Ein Theorem Minkowskis läßt sich in der Form $\Sigma(C) = E^*(\Sigma(C))$ anschreiben, wobei $E(A)$ die Menge der Extrempunkte von A bezeichnet. Die Beziehung $\Sigma(C) = C$ gilt dann und nur dann, wenn C ein abgeschlossener, konvexer sphärischer Bereich konstanter Breite $b = \pi/2$ ist. Es wird $\Sigma \Sigma(C) = \Sigma^2(C)$ usw. gesetzt. Die Beziehung $\Sigma^2(C) = C$ gilt dann und nur dann, wenn C abgeschlossen und konvex ist, mithin gilt $\Sigma^3(C) = \Sigma(C)$ in jedem Fall. — Einige Sätze charakterisieren Ungleichungssysteme, welche nicht triviale Lösungen haben, d. h. für welche $\Sigma(C) \neq \emptyset$ ist. Dies ist sicher dann der Fall, wenn C eine endliche Menge der Anzahl $m \leq n+1$ ist. Besteht C aus mehr als $2n+1$ Punkten, so ist $\Sigma(C)$ dann und nur dann nicht leer, wenn $\Sigma(C')$ nicht leer ist für jedes Teilsystem C' von $2n+1$ Punkten. Diese Aussage folgt aus einem bekannten Überdeckungstheorem vom Helly-Radonschen Typus. — Nach einigen Erweiterungen stellt der Verf. noch die Frage nach Lösungen des strikten Ungleichungssystems $\sum_0^n c_i x_i > 0$. Notwendig und hinreichend für die

Existenz von Lösungen ist die Bedingung für C , keine antipodischen Punktpaare aufzuweisen. So hat jedes irreduzible System von $n + 1$ Ungleichungen Lösungen. Verf. zitiert u. a. L. L. Dines und N. H. McCoy [On linear inequalities, Trans. R. Soc. Canada, III. s. 27, 37—70 (1933); dies. Zbl. 8, 304], wo einige Theoreme ausgesprochen sind, die durch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit verallgemeinert werden.

H. Hadwiger (Bern).

Angewandte Geometrie:

● Stiefel, Eduard: **Lehrbuch der darstellenden Geometrie. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Math. Reihe Bd. VI).** Basel: Birkhäuser Verlag. 1947. 174 S. mit über 130 Abb., geb. Sfr. 28,50; brosch. Sfr. 24,50.

Das vorbildlich ausgestattete Buch führt — bei verhältnismäßig geringem Umfang — weiter und in originellerer Weise in die konstruktive Geometrie ein als die in den letzten Jahren erschienenen deutschen Bücher. Es gliedert sich in 4 Teile. Der erste Teil — die elementare darstellende Geometrie (69 S.) — bringt den für die Ingenieur-Studenten einer Technischen Hochschule erforderlichen Stoff: Die zugeordneten Normalprojektionen, die orthogonale Axonometrie und die konstruktive Behandlung einfacher Kurven und Flächen, alles an Hand vortrefflicher, möglichst einfach gehaltener Figuren. Im zweiten Teil (23 S.) werden die Kegelschnittsätze mit Hilfe der Reziprozität, d. h. der Antipolarität eines Einheitskreises, gewonnen und die Flächen 2. Grades — vielleicht etwas allzu kurz — gestreift. Im dritten Teil — der projektiven darstellenden Geometrie (43 S.) — wird zunächst die reguläre projektive Abbildung der Geraden auf die Gerade und der Ebene auf die Ebene behandelt und dann in sehr geschickter Weise die gesamte Perspektive als singuläre Kollineation im R_3 entwickelt: Dem (affin spezialisierten) Koordinatentetraeder des R_3 mit seinen Achsen-Einheitspunkten wird — unter Beachtung gewisser Einschränkungen — das Bild in der Zeichenebene beliebig zugeordnet und der abzubildende Gegenstand dann durch Koordinaten eingezeichnet. Als affine Spezialfälle ergeben sich daraus die üblichen axonometrischen Methoden der elementaren darstellenden Geometrie. Freilich ist dieser elegante Weg, der also den anschaulichen Projektionsvorgang durch abstrakte Abbildungsforderungen ersetzt, beispielsweise für den jungen Architekten, der ja heute meist im harten Kampf mit den einfachsten geometrischen Vorstellungen liegt, allzu verführerisch: kommt er doch seinem Verlangen nach unverständenen „Rezepten“ sehr entgegen. Für den Praktiker werden in diesem Abschnitt weiter dargestellt das heute sehr beliebte Einschnide-Verfahren der Axonometrie und — auch rechnerisch — die Grundgedanken der modernen Photogrammetrie. Der vierte Teil (16 S.) bringt einen Abriß der sphärischen darstellenden Geometrie und der konformen Abbildungen für Zwecke der Kristallographie und der Karten-Projektion. Daß auf vier Seiten des Anhangs erstmalig in einem Lehrbuch der Praxis auf topologische Gesichtspunkte, vor allem auf die Schließungseigenschaft der Gewebe, hingewiesen wird, erfreut die Herzen der Geometer.

F. Rehbeck (Braunschweig).

Topologie:

Nöbeling, Georg: **Topologie der Vereine und Verbände.** Arch. Math., Oberwolfach 1, 154—159 (1948).

Die Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie lassen sich verallgemeinern zu einer Topologie der Vereine und Verbände. Der weiteste betrachtete Begriff ist der des topologischen Vereines, d. h. einer teilweise geordneten Menge \mathfrak{B} , in der jedem Element A eine abgeschlossene Hülle \bar{A} zugeordnet ist, so daß $A \subset \bar{A}$, $\bar{A} = A$ gilt und aus $A \subset B$ stets $\bar{A} \subset \bar{B}$ folgt. Ein schärferer Begriff ist der des Kuratowski-topologischen Verbandes, der die obigen Eigenschaften erfüllt, ferner $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ und ein Nullelement 0 mit $\bar{0} = 0$ enthält. Jeder topologische Raum ist im Sinne dieser Theorie ein Kuratowski-topologischer vollständiger Verband. In diesen topologischen Vereinen und Verbänden werden nun die topologischen Grundbegriffe eingeführt, Häufungselemente von gerichteten Folgen, der topologische Limes, verschiedene Arten von Homomorphie und Isomorphie, der Begriff des zusammenhängenden Elements in distributiven Verbänden; die bekannten Trennungsaxiome lassen sich in topologischen Vereinen erklären, und man kommt so zu den Hausdorffschen, regulären, normalen und vollständig normalen Vereinen. Auch die Kompakt-

heit und Bikompaktheit läßt sich definieren. Besonders weitgehende Aussagen lassen sich für Kuratowski-topologische Boolesche Verbände machen, in denen sich besonders glatte Resultate ergeben. Eine ausführliche Darstellung wird in Aussicht gestellt.

Köthe (Mainz).

Choquet, G.: *Convergences*. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., II. s. 23, 57—112 (1948).

Grundlage der Arbeit ist die folgende (ebenso allgemeine, wie zweckmäßige) Definition des oberen und unteren Limes einer Familie (= System) von Mengen eines topologischen Raumes E . Es sei I eine Menge irgendwelcher Elemente i ; jedem $i \in I$ sei eine Teilmenge e_i von E zugeordnet; ist nun \mathfrak{F} ein Filter in I , so definiert Verf. als oberen Limes bezüglich \mathfrak{F} der Familie $(e_i)_{i \in I}$, in Zeichen $\sup (e_i)_{\mathfrak{F}}$, die Menge aller Punkte x von E mit der Eigenschaft, daß für jede Umgebung V von x und jede Menge a des Filters \mathfrak{F} ein $i \in a$ existiert derart, daß der Durchschnitt $V e_i$ nicht leer ist; als unteren Limes bez. \mathfrak{F} von $(e_i)_{i \in I}$, in Zeichen $\inf (e_i)_{\mathfrak{F}}$, definiert Verf. die Menge aller Punkte x von E mit der Eigenschaft, daß für jede Umgebung V von x eine Menge a des Filters \mathfrak{F} existiert derart, daß $V e_i$ nicht leer ist für jedes $i \in a$. Verf. untersucht zunächst diese Begriffe. — I. Es sei $R(x, y)$ eine Relation zwischen Punkten x und y zweier topologischer Räume X und Y . Es sei \mathfrak{E} die Menge aller Punkte (x, y) des topologischen Produktes $X \times Y$, für welche $R(x, y)$ gilt. Verf. nennt die Relation R abgeschlossen (offen), wenn \mathfrak{E} abgeschlossen (offen) ist. Für einen beliebigen Punkt x von X bezeichne $\mathfrak{Y}(x)$ die Menge aller Punkte y von Y , für welche $R(x, y)$ gilt. Verf. nennt R oberhalb stetig in $x_0 \in X$, wenn $\mathfrak{Y}(x_0) \supseteq \sup \mathfrak{Y}(x)_{\mathfrak{F}}$ gilt, wobei das Filter \mathfrak{F}' besteht aus allen um x_0 verminderten Nachbarschaften von x_0 (Nachbarschaft von x_0 gleich Menge, in deren offenem Kern x_0 liegt). Verf. nennt R unterhalb stetig in x_0 , wenn $\mathfrak{Y}(x_0) \subset \inf \mathfrak{Y}(x)_{\mathfrak{F}}$ gilt, wobei \mathfrak{F} das Filter aller Nachbarschaften von x_0 ist. Aus der Abgeschlossenheit (Offenheit) von R folgt die Oberhalbstetigkeit (Unterhalbstetigkeit) von R . Es werden diese Begriffe näher untersucht, insbesondere in dem speziellen Fall, daß $X = Y$ und R eine Äquivalenzrelation ist. — II. Es sei E eine Menge irgendwelcher Elemente. Es sei $R(\mathfrak{F}, m)$ eine Relation zwischen Filtern \mathfrak{F} in E und Elementen m von E , die folgenden Bedingungen genügt: 1. Ist $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ und gilt $R(\mathfrak{F}, m)$, so gilt $R(\mathfrak{F}', m)$; 2. gilt nicht $R(\mathfrak{F}, m)$, so existiert ein $\mathfrak{F}' \supseteq \mathfrak{F}$ derart, daß für jedes $\mathfrak{F}'' \supseteq \mathfrak{F}'$ nicht $R(\mathfrak{F}'', m)$ gilt; 3. ist m ein Element von E und \mathfrak{F} das Filter aller m enthaltenden Teilmengen von E , so gilt $R(\mathfrak{F}, m)$. Gilt $R(\mathfrak{F}, m)$, so nennt Verf. das Filter \mathfrak{F} pseudo-konvergent gegen den Pseudo-Limes m . Existiert zu beliebigem \mathfrak{F} und m ein Filter $\mathfrak{F}' \supseteq \mathfrak{F}$ derart, daß m Pseudo-Limes von \mathfrak{F}' ist, so heißt m ein Pseudo-Häufungspunkt von \mathfrak{F} . Ist A eine Teilmenge von E , so sei die Pseudo-Hülle \tilde{A} von A die Menge der Pseudo-Häufungspunkte des Filters aller Obermengen von A . Es gilt $A \subseteq \tilde{A}$ und $\tilde{\tilde{A}_1} \cap \tilde{\tilde{A}_2} = \tilde{A_1} \cap \tilde{A_2}$. Diese Pseudo-Topologie verwendet Verf. insbesondere zum Studium der Menge 2^E aller abgeschlossenen Teilmengen A eines topologischen Raumes E , indem er in 2^E folgendermaßen eine Pseudo-Topologie einführt (jedes Element e von 2^E stellt eine abgeschlossene Teilmenge von E dar, die mit A_e bezeichnet wird): Für jedes Filter \mathfrak{F} in 2^E und jedes $e \in 2^E$ sei $R(\mathfrak{F}, e)$ gleichbedeutend mit $A_e = \inf (A_i)_{\mathfrak{F}} = \sup (A_i)_{\mathfrak{F}}$. — III. Es seien X und Y zwei metrische Räume, $X \times Y$ ihr topologisches Produkt und Q die Menge $\subseteq X \times Y$, welche eine stetige Abbildung f von X in Y darstellt [d. h. Q die Menge aller $(x, f(x))$]. Weiter sei F eine Teilmenge von $(X \times Y) - Q$. Jedem $a \in F$ sei eine abgeschlossene (evtl. leere) Teilmenge $\delta(a)$ eines separablen, metrischen Raumes zugeordnet. Für jeden Punkt m aus $X \times Y$ bezeichne $[m]$ die Menge aller Punkte von $X \times Y$, deren erste Koordinate gleich m ist. Für jede Umgebung V von m in $X \times Y$ wird gesetzt: $C_V(m) = \bigcup \delta(a)$, wobei a die Menge $F \cap V \cap [m]$ durchläuft, und $P_V(m) = \overline{\bigcup \delta(a)}$, wobei a die Menge $F \cap V$

durchläuft; weiter $C(m) = \cap C_V(m)$ und $P(m) = \cap P_V(m)$, wobei V alle Umgebungen von m durchläuft. Es gilt $C(m) \subseteq P(m)$ und $P(m)$ ist oberhalb stetig. $C(m)$ und $P(m)$ heißen das Contingent bzw. Paratingent in m . Verf. beweist: Existiert eine abzählbare Basis $(V_i)_{i=1,2,\dots}$ von Umgebungen von Q in $Y \times X$ derart, daß, für jedes i , $C_{V_i}(m)$ unterhalb stetig ist als Funktion von $m \in Q$, so gilt $P(m) = C(m)$ in allen Punkten m einer Teilmenge B von Q , deren Komplement $Q - B$ ein F_σ erster Kategorie in Q ist. Dieser Satz (bzw. ein zweiter, analog lautender) ist zahlreicher Anwendungen fähig. Beispielsweise läßt er sich anwenden auf die bekannten Paratingent- und Contingentbegriffe von Bouligand. Außerdem umfaßt er die drei fundamentalen topologischen Sätze, auf denen Denjoy seine Theorie der reellen Funktionen aufbaut (*Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, II, Paris 1941). *Nöbeling* (Erlangen).

Choquet, Gustave: Sur un théorème récent de M. Denjoy. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1670—1673 (1948).

Verf. formuliert den im vorsteh. Referat, Teil III, angegebenen Satz. *Nöbeling*.

Denjoy, Arnaud: La topologie des fonctions. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1407 bis 1410 (1948).

Verf. gibt allgemeine Voraussetzungen an, unter denen die drei Sätze gelten, von denen am Schluß des vorangehenden Referats über G. Choquet, Convergences, die Rede ist. Diese Voraussetzungen stehen in engem Zusammenhang mit den Voraussetzungen der beiden Sätze von Choquet (Teil III des genannten Referats): Bei geeigneter Formulierung erweisen sich die Voraussetzungen von Denjoy als Spezialfälle der Voraussetzungen von Choquet. *Nöbeling*.

Katětov, M.: On topological spaces containing no disjoint dense sets. Mat. Sbornik, II. s. **21**, 1—10 u. engl. Zusammenfassg. 10—12 (1947) [Russisch].

Ausgehend von der Frage E. Čechs, ob es einen in sich dichten Hausdorffschen Raum gibt — es handelt sich hier nur um Hausdorffsche Räume —, der nicht Summe zweier fremder in ihm dichter Mengen ist, wird ein in sich dichter (in sich dichter regulärer) Raum minimal (R-minimal) genannt, wenn jede eindeutige stetige Abbildung eines in sich dichten (in sich dichten regulären) Raumes auf S eine Homöomorphie ist. Es wird gezeigt: Jeder in sich dichte Raum ist eindeutiges stetiges Bild eines minimalen Raumes. Damit ist die Existenz minimaler Räume, freilich auf einem das Auswahlaxiom oder etwas dazu Äquivalentes voraussetzenden Weg, bewiesen. Ein Raum S ist dann und nur dann minimal, wenn jede in sich dichte Menge $M \subset S$ in S offen ist, oder auch, wenn jeder Punkt einer Menge $M \subset S$ innerer Punkt von M oder isolierter Punkt von M ist. — In einem minimalen Raum S ist jede in S dichte Menge offen, weshalb er nicht Summe zweier fremder in S dichter Mengen ist. Damit ist die Frage E. Čechs bejahend beantwortet. — Ein in sich dichter Raum S ist dann und nur dann minimal, wenn jede in S definierte reelle Funktion an jeder Stelle einen Limes hat. — Jede auf einer in sich dichten Untermenge eines minimalen Raumes S definierte beschränkte stetige Funktion kann zu einer in S stetigen Funktion erweitert werden. — Nun wird der Begriff des minimalen Raumes zu dem eines in bezug auf eine Untermenge minimalen Raumes erweitert, womit die obigen Sätze verallgemeinert werden. Dabei ergeben sich auch Sätze über absolut abgeschlossene Räume, unter anderem, daß es absolut abgeschlossene minimale Räume gibt. — Ähnlich wie die minimalen werden die R-minimalen Räume untersucht. Auch ihre Existenz wird (nicht konstruktiv) bewiesen. Auch sie sind Beispiele dafür, daß die genannte Čechsche Frage positiv zu beantworten ist. — Es gibt normale R-minimale Räume beliebiger Mächtigkeit. Jede in einer in sich dichten Menge eines R-minimalen Raumes definierte reelle, beschränkte, stetige Funktion kann zu einer in S stetigen Funktion erweitert werden. — Ein Teil dieser Ergebnisse ist, wie Verf. feststellt, schon von E. Hewitt [*Duke Math. J.* **10**, 309—333 (1943)] gefunden worden. *Vietoris* (Innsbruck).

Katětov, Miroslav: Complete normality of cartesian products. *Fundam. Math.*, Warszawa 35, 271—274 (1948).

Man nennt den Raum P vollständig normal (v. n., „completely normal“), wenn aus $\bar{A}B + A\bar{B} = 0$ die Existenz offener $U \supset A$, $U' \supset B$, $UU' = 0$ folgt.

Der normale P ist „perfectly normal“ (p. n), wenn $A = \bigcap_{v=1}^{\infty} U_v$ (U_v offen) für jedes A gilt. Verf. zeigt unter anderen: 1. Wenn $P \times Q$ v. n. ist, dann ist entweder jede abzählbare Menge von Q geschlossen, oder P ist p. n. 2. Der bikompakte Raum P ist dann und nur dann metrisierbar, wenn $P \times P \times P$ v. n. ist. [Verf. wirft die Frage auf, ob aus der vollständigen Normalität von $P \times P$ die Metrisierbarkeit von P folgt (wobei P wiederum bikompakt ist).] *Fáry* (Paris).

Sorgenfrey, R. H.: On the topological product of paracompact spaces. *Bull. Amer. math. Soc.* 53, 631—632 (1947).

L'auteur résoud, par la négative, une question posée par le rapporteur, en donnant un exemple d'espace paracompact E tel que $E \times E$ ne soit pas paracompact; l'espace E est l'ensemble des nombres réels ≥ 0 où les voisinages d'un point x sont tous les ensembles contenant un intervalle semi-ouvert $a \leq t < b$, qui contient le point x ; l'auteur montre que $E \times E$ n'est pas normal, ni a fortiori paracompact.

J. Dieudonné (Nancy).

Whyburn, G. T.: Sequence approximations to interior mappings. *Ann. Soc. Polonaise Math.* 21, 147—152 (1948).

Wenn durch f offene Mengen von A auf offene Mengen von B abgebildet werden, so heißt sie offen (interior); f heißt „light“, wenn $f^{-1}(y)$ ($y \in B$) total unzusammenhängend ist. Verf. nennt eine Folge f_n gleichmäßig näherungsweise offen (g. n. o., „uniformly approximately interior“, wenn $f_n[V_\varepsilon(x)] \supset V_\delta[f_n(x)]$, wo $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, $n \geq N(\varepsilon)$ ist [dabei bedeutet $V_r(x)$ die Menge der Punkte, die eine Distanz $< r$ von x haben]. Er beweist unter anderen den Satz: Wenn A , B lokal kompakt und lokal zusammenhängend sind und die Folge der offenen Abbildungen f_n auf jede kompakte Menge gleichmäßig zu der light Abbildung f konvergiert, so ist die Folge g. n. o. und $\ast f$ offen.

Fáry (Paris).

Hurewicz, W. J. Dugundji and C. H. Dowker: Continuous connectivity groups in terms of limit groups. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. 49, 391—406 (1948).

Die — mit „singulären Ketten“ arbeitende — Theorie der stetigen Homologie- (und Kohomologie-) Gruppen soll mit den Begriffen der direkten und inversen Grenzgruppen gefaßt werden. Zu diesem Zweck werden zunächst diese letzteren Begriffe erweitert: zwischen zwei Gruppen des Spektrums werden auch mehrere Homomorphismen zugelassen statt nur eines einzigen. Für die inversen Grenzgruppen geschieht das folgendermaßen: Sei jedem Element ϱ einer teilweise geordneten Menge eine kommutative Gruppe G_ϱ zugeordnet und jedem Paar $\varrho < \sigma$ eine Familie von Homomorphismen von G_σ in G_ϱ ; diese heißen zulässig. Ist $\varrho < \sigma < \tau$, so möge jeder zulässige Homomorphismus von G_τ in G_σ mit jedem von G_σ in G_ϱ einen zulässigen Homomorphismus von G_τ in G_ϱ ergeben. „Faden“ (thread) heißt eine mit allen zulässigen Homomorphismen verträgliche Auswahl je eines Elements g_ϱ aus jeder Gruppe G_ϱ . Diese Fäden mit der naheliegenden Zusammensetzung bilden die „inverse Grenzgruppe“ zum „Spektrum“ der Gruppen G_ϱ . Bei der „direkten Grenzgruppe“ muß die teilweise geordnete Menge gerichtet (directed, filtrant à droite) sein; die Homomorphismen gehen in der anderen Richtung, von G_ϱ in G_σ bei $\varrho < \sigma$; bei jedem Paar $\varrho < \sigma$ muß mindestens einer vorliegen; schließlich müssen zwei Gruppenelemente, die aus einem durch zwei zulässige Homomorphismen entstehen, bei zwei geeigneten zulässigen Homomorphismen dasselbe Bild haben. Die Beziehung irgend zweier Elemente von Gruppen G_ϱ und G_σ , bei geeigneten zulässigen Homomorphismen dasselbe Bild zu haben, ist eine Äquivalenz; die zugehörigen Klassen, „Bündel“ genannt, bilden, mit der

naheliegenden Zusammensetzungsregel, die „direkte Grenzgruppe“. Die Charakterengruppe der direkten Grenzgruppe diskreter Gruppen ist die inverse Grenzgruppe ihrer Charaktergruppen. — Dann werden die nötigen Begriffe über Vielfache und ihre Abbildungen sowie deren Wirkung auf die Homologie- und Kohomologiegruppen zusammengestellt. Die stetigen Homologie- und Kohomologiegruppen werden in die Theorie eingeordnet (die ersten als direkte, die zweiten als inverse Grenzgruppen) und es ergibt sich Alexanders Satz, daß sie bei Vielfachen den kombinatorischen Gruppen der zugehörigen Komplexe isomorph sind. Die genaueren Abgrenzungen betreffs der Mächtigkeit der auftretenden Gebilde können nicht in Kürze wiedergegeben werden. Die Homologiegruppen erweisen sich als unabhängig von der zugelassenen Mächtigkeit, die Kohomologiegruppen bei kompakter Koeffizientengruppe und bei hinreichend großen Mächtigkeiten sowie in bestimmten anderen Fällen. Ein Gegenbeispiel zeigt, daß solche Einschränkungen nötig sind. — Da in die Definition der stetigen (Ko-)Homologiegruppen stetige Abbildungen eingehen, sind sie besonders geeignet zur Behandlung von Fragen, bei denen homotope Abbildungen auftreten. Als Beispiel hierfür dient ein Satz, der unter bestimmten Voraussetzungen (Asphärizität) aussagt, daß bei stetiger Abbildung eines topologischen Raumes X in einem anderen Y die dadurch bewirkten Homomorphismen der Homologiegruppen von X in die von Y nur von dem entsprechenden Homomorphismus bei der ersten Homotopiegruppe abhängen. — Im Schlußabschnitt werden mit Hilfe offener Überdeckungen und diesen zugeordneter Simplicialkomplexe die Beziehungen zwischen den (Ko-)Homologiegruppen nach Čech, Vietoris und Alexander [Ann. Math., Princeton, II. s. 37, 698—708 (1936); dies. Zbl. 15, 129] untersucht.

H. Kneser (Tübingen).

Koszul, J.: Sur le troisième nombre de Betti des espaces de groupes de Lie compacts. C. r. Acad. Sci., Paris 224, 251—253 (1947).

In Verallgemeinerung eines Resultates von E. Cartan [Ann. Soc. Polonaise Math. 8, 181—225 (1929)] wird mit Hilfe des Ringes der linksinvarianten Differentialformen gezeigt, daß die dritte Bettische Zahl einer einfachen kompakten Lieschen Gruppe gleich 1 ist.

Franz (Frankfurt a. M.).

Koszul, J.: Sur l'homologie des espaces homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris 225, 477—479 (1947).

Unter Benutzung früherer Resultate [vgl. vorsteh. Referat, ferner: C. r. Acad. Sci., Paris 225, 217—219 (1947)] kommt Verf. zu folgendem Ergebnis. Ist G eine kompakte, zusammenhängende Liesche Gruppe und U eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe, p die natürliche Abbildung von G auf den homogenen Raum $W = G/U$, so läßt sich der Homologiering von p vollständig bestimmen. Zahlreiche Anwendungen werden angegeben. Franz (Frankfurt a. M.).

Whitney, Hassler: Relations between the second and third homotopy groups of a simply connected space. Ann. Math., Princeton, II. s. 50, 180—202 (1949).

Diese Arbeit enthält als Vorbereitung zur Klassifikation der Abbildungen eines 3-Komplexes in einen einfach zusammenhängenden Raum R Untersuchungen über gewisse Abbildungen der 3-Sphäre S^3 in R : Man fasse S^3 als euklidischen Raum E^3 mit einem unendlich fernen Punkt auf. In E^3 betrachte man endlich viele punktfremde (in gewisser Weise normierte) topologische Bilder T_i eines Volltorus (tube system). Alle Querschnitte einer einzelnen dieser „Röhren“ T_i werden nun in der gleichen Weise in R abgebildet, so daß der Rand in einen festen Punkt p übergeht. Alles außerhalb der T_i wird ebenfalls in p abgebildet. So entsteht ein Element ξ aus der dritten Homotopiegruppe $\pi_3(R)$, das durch das Röhrensystem und die Abbildungen der Querschnitte bestimmt ist. Die Querschnittsabbildung von T_i bestimmt aber ein Element $\alpha_i \in \pi_2(R)$. Verf. bestimmt den Zusammenhang zwischen ξ , α_i und dem Röhrensystem. Es ist $2\xi = \sum_{i,j} LC(\zeta_i, \zeta_j) \alpha_i \alpha_j$. Dabei ist $LC(\zeta_i, \zeta_j)$

die Verschlingungszahl zwischen irgend zwei Längsfasern von T_i und T_j und $\alpha_i \alpha_j \in \pi_3(R)$ ist das Whiteheadsche Produkt von α_i und α_j [vgl. J. H. C. Whitehead, Ann. Math., Princeton, II. s. 42, 409—428 (1941); dies. Zbl. 27, 264]. Hierdurch ist ξ bestimmt, wenn π_3 kein Element der Ordnung 2 hat. Es wird jedoch auch eine ähnliche, etwas kompliziertere Formel für ξ selbst angegeben. Das Haupt Hilfsmittel beim Beweis besteht darin, die gegebene Abbildung so zu deformieren, daß zwei Röhren T_1, T_2 mit demselben α an einem Querschnitt aufgeschnitten und die Enden von T_1 an die von T_2 geheftet werden. An Stelle der Verschlingungszahlen können auch Schnittzahlen zwischen den Projektionen der ζ_i auf eine feste Ebene eingeführt werden. — Das Whiteheadprodukt $\alpha_i \alpha_j$ wird selbst eingeführt als eine einfache Abbildung vom obigen Typus. Alle diese Abbildungen sind in gewisser Weise Verallgemeinerungen der Hopfschen Abbildung der S^3 auf die S^2 , die sich für den Fall eines einzigen T mit $LC(\zeta, \zeta') = 1$, $\alpha = 1$, $R = S^2$ ergibt. — Diese einfachen Abbildungen ξ genügen aber für das Klassifikationsproblem nur, wenn $\pi_2(R)$ kein Element endlicher Ordnung hat. Sei dagegen etwa Ordnung $\alpha = n$. Dann werden Verbindungszylinder (junctions) eingeführt, in welche n Röhren mit Querschnittsabbildung α einmünden. Wegen $n\alpha = 0$ kann dann die Abbildung auf den ganzen Zylinder fortgesetzt werden. Auch für solche Abbildungen eines Röhrensystems mit Verbindungszylindern wird das zugehörige $\xi \in \pi_3(R)$ vollständig bestimmt.

Burger (Frankfurt/Main).

Hu, Sze-Tsen: On homotopy and deformation retracts. Proc. Cambridge philos. Soc. 43, 314—320 (1947).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des folgenden Deformationssatzes der Hurewiczschen Homotopietheorie [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 38, 112—119, 521—528 (1935); dies. Zbl. 10, 378, 11, 371]: Ein zusammenhängendes Kompaktum und absoluter Umgebungsretrakt, dessen sämtliche Homotopiegruppen verschwinden, ist in sich zusammenziehbar. Bereits J. H. C. Whitehead gab eine solche, auf Polyeder beschränkte Verallgemeinerung [dies. Zbl. 22, 407]. Die vorliegende, allgemeinere Räume zugrunde legende Verallgemeinerung beruht wesentlich auf einem Kuratowskischen Erweiterungssatz [Fundam. Math., Warszawa 24, 259—268 (1935); dies. Zbl. 11, 40]. — Ist der Raum Y separabel metrisch und absoluter Umgebungsretrakt, Y_0 ein ebensolcher abgeschlossener Teilraum, so heißt Y für $n > 1$ n -asphärisch modulo Y_0 , wenn die n -te relative Homotopiegruppe von Y modulo Y_0 verschwindet; für $n = 1$ ist die Definition leicht zu modifizieren. Dann lautet das Hauptresultat: Wenn Y kompakt und r -asphärisch mod Y_0 ist für alle Dimensionen von 1 bis zur Dimension von $Y - Y_0$, so ist Y_0 ein Deformationsretrakt von Y .

Franz (Frankfurt a. M.).

Hu, Sze-Tsen: Homotopy groups of some mapping spaces of spheres. Bull. Calcutta math. Soc. 39, 127—130 (1947).

Y sei ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer, separabler metrischer Raum, Y_0 ein ebensolcher Teilraum. In der m -Sphäre S^m seien zwei Punkte x_0 und x_1 ausgezeichnet, in Y_0 der Punkt y_0 . A^m bezeichne den Abbildungsraum aller stetigen Abbildungen f von S^m in Y mit $f(x_1) \in Y_0$, Ω^m den Teilraum von A^m aller stetigen Abbildungen, für die überdies $f(x_0) = y_0$. A_*^m und Ω_*^m seien die Komponenten von A^m und Ω^m , welche die konstante Abbildung $f(S^m) = y_0$ enthalten. Hier werden in Verallgemeinerung früherer Resultate des Verf. [Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 717—734 (1947); dies. Zbl. 29, 422] und von Abe [Jap. Journ. Math. 16, 169—176 (1940); dies. Zbl. 23, 382] die r -dimensionalen Homotopiegruppen $\pi^r(A_*^m)$ und $\pi^r(\Omega_*^m)$ untersucht. Das Hauptresultat lautet: Für $r > 1$ ist $\pi^r(A_*^m)$ bzw. $\pi^r(\Omega_*^m)$ isomorph zu der direkten Summe $\pi^{m+r}(Y) + \pi^r(Y_0)$ bzw. $\pi^{m+r}(Y) + \pi^{r+1}(Y, Y_0)$. Dabei bezeichnet der letzte Summand die relative Homotopiegruppe von Y in bezug auf Y_0 im Sinne von Hurewicz und Steenrod

[Proc. nat. Acad. Sci. USA 27 (1941)]. Auch für $r = 1$ gilt ein entsprechend modifiziertes Resultat.

Franz (Frankfurt a. M.).

Whitehead, George W.: On spaces with vanishing low-dimensional homotopy groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 207—211 (1948).

Für $n > 2$ ist die $(n+1)$ -te Homotopiegruppe $\pi_{n+1}(S_n)$ der n -Sphäre S^n zyklisch von der Ordnung 2, es gibt also bis auf homotope Abbildungen genau eine wesentliche Abbildung h von S^{n+1} auf S^n . X sei ein zusammenhängender, für alle Dimensionen $< n$ asphärischer Raum, $\pi_n = \pi_n(X)$ seine n -te Homotopiegruppe, $H_n = H_n(X)$ seine n -te Homologiegruppe und $\Sigma_n = \Sigma_n(X)$ die durch Sphärenbilder erzeugbare Untergruppe von H_n . Da jedes Element von π_n durch eine Abbildung g von S^n in X repräsentiert wird, wird entsprechend durch gh eine Abbildung von S^{n+1} in X , also ein Element von $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}(X)$ repräsentiert, und so ergibt sich eine homomorphe Abbildung η von π_n in π_{n+1} . Dieser Homomorphismus η und gewisse Verallgemeinerungen von η führen zu den folgenden vom Verf. ohne vollständige Beweise angegebenen Theoremen: (1) Für $n > 2$ ist H_{n+1} isomorph zu der Faktorgruppe von π_{n+1} nach der Bildgruppe von π_n in π_{n+1} bei η . (2) Für $n > 3$ ist H_{n+2}/Σ_{n+2} isomorph $K(\eta)/2\pi_n$, wobei $K(\eta)$ den Kern von π_n bei η und $2\pi_n$ die Untergruppe aller doppelten Elemente von π_n bezeichnet. (3) Ist $\pi_{n+2} = 0$ und $n > 3$, so ist H_{n+3}/Σ_{n+3} isomorph zu $H_{n+1}/2H_{n+1} + [\pi_n]$, wobei der letzte Summand die Untergruppe aller Elemente der Ordnung 2 von π_n bezeichnet. — Hier- nach sind also unter den gegebenen Voraussetzungen für X die Gruppen H_{n+1} und H_{n+2}/Σ_{n+2} durch die Homotopiegruppen π_n und π_{n+1} und den Homomorphismus η bestimmt; wenn auch $\pi_{n+2} = 0$, also auch $\Sigma_{n+2} = 0$ ist, so ist auch H_{n+2} und H_{n+3}/Σ_{n+3} durch π_n , π_{n+2} und η bestimmt. Diese letzte Aussage steht in Beziehung zu früheren ähnlichen Resultaten von S. Eilenberg und S. MacLane [Ann. Math., Princeton, II. s. 46, 489—509 (1945)], deren allgemeine Existenzaussagen hier zu einem Teil durch explizite Bestimmungen ergänzt werden. Weiter wird Bezug genommen auf frühere [Proc. nat. Acad. Sci. USA 32, 272—280 (1946)] und auf noch nicht veröffentlichte Ergebnisse derselben Verfasser, die eine gewisse Kohomologieinvariante K^{n+2} betreffen, auf unveröffentlichte Ergebnisse von J. H. C. Whitehead und auf den Steenrodschen Homomorphismus Sq_{n-2} (s. dies. Zbl. 30, 416).

Franz (Frankfurt a. M.).

Schubert, Horst: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1949, Nr. 3, 50 S. (1949).

Bezüglich der Knoten, die in zwei (oder mehr) Bestandteile zerlegt werden können, begnügt man sich in der Knotentheorie gewöhnlich mit der Bemerkung, daß sie bekannt seien, wenn man ihre Bestandteile kennt; hierfür gibt Verf. eine — keineswegs triviale — Begründung. Ist in der dreidimensionalen Sphäre \mathbb{S} eine Vollkugel \mathbb{R} mit dem Rand \mathbb{R} und darin eine „Sehne“ u gegeben, d. h. ein orientierter, einfacher Weg u , der zwei Punkte von \mathbb{R} verbindet und ganz im Innern von \mathbb{R} verläuft, so ist dadurch bis auf erlaubte Abänderungen ein Knoten k definiert; man erhält k , wenn man u durch einen auf \mathbb{R} verlaufenden einfachen Weg zu einer geschlossenen Kurve ergänzt. Umgekehrt kann jeder Knoten durch eine Vollkugel mit Sehne dargestellt werden; zwei solche Darstellungen bestimmen dann und nur dann denselben Knoten, wenn sie durch die Orientierung erhaltende „semilineare“ Abbildungen von \mathbb{S} ineinander übergehen. (Alle geometrischen Gebilde werden als euklidische Polyeder vorausgesetzt; semilinear ist eine simpliziale topologische Abbildung, die die Simplexe geeigneter Unterteilungen affin abbildet.) Sind nun zwei Knoten k_i ($i = 1, 2$) durch \mathbb{R}_i , \mathbb{R}_i , u_i gegeben, so erhält man einen Repräsentanten k des „Produktes“ $k_1 k_2$, indem man \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 so auf die beiden Vollkugeln, in die \mathbb{S} durch eine zweidimensionale Sphäre \mathbb{R} zerlegt wird, semilinear abbildet, daß dabei auf \mathbb{R} das Bild des Anfangspunktes von u_1 (bzw. u_2) mit dem Bild des Endpunktes von u_2 (bzw. u_1) zusammenfällt; k ist die von u_1

und u_2 gebildete Kurve. Das Produkt ist kommutativ und bei mehreren Faktoren assoziativ; die (einzige) Eins der Multiplikation ist die unverknotete Kurve (Kreis). Knoten, die sich nicht als Produkt zweier vom Kreis verschiedener Knoten darstellen lassen, heißen Primknoten; zu den Primknoten gehören alle Knoten vom Geschlecht 1 [für die Definition vgl. H. Seifert, Math. Ann., Berlin 110, 571—592 (1935); dies. Zbl. 10, 133]. Das folgt, ebenso wie die Tatsache, daß nur der Kreis Einselement der Multiplikation sein kann, aus dem Satz: Das Geschlecht eines Produktknotens ist gleich der Summe der Geschlechter der Faktoren. Dieser Satz sichert auch die Zerlegbarkeit eines gegebenen Knotens in endlich viele Primknoten. Das Hauptergebnis der Arbeit ist: Die Zerlegung eines Knotens in Primknoten ist eindeutig in dem Sinne, daß die Primfaktoren und die Vielfachheiten, mit denen sie in dem Knoten auftreten, eindeutig bestimmt sind. Das wird bewiesen auf dem Wege über „zerlegende Systeme von Kugeln“, die die einzelnen Primknoten des Knotens einschließen; die aus der Knotentheorie bekannten geometrischen Eigentümlichkeiten (wie z. B. die Tatsache, daß in \mathbb{R} eine geradlinige Sehne einen vom Kreis verschiedenen Knoten definieren kann, wenn \mathbb{R} passend in \mathbb{S} liegt) führen dazu, daß es zerlegende Kugelsysteme gibt, die nicht durch semilineare Abbildung ineinander übergehen und z. B. verschiedene Reihenfolgen der Faktoren festlegen. — Ein Verfahren, nach dem die Primknotenzerlegung eines Knotens hergestellt werden kann, ist in diesen Untersuchungen nicht enthalten. Pannwitz (Berlin).

Scorza-Dragoni, Giuseppe: A proposito di una costruzione fondamentale per lo studio delle traslazioni piane generalizzate. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 353—365 (1947).

Wenn t eine indikatrixenthaltende, fixpunktfreie topologische Abbildung der Ebene auf sich bedeutet, so gibt es nach dem wohlbekannten Brouwerschen Translationssatz eine offene Linie L , welche ihr Bild $t(L)$ nicht schneidet, von der Eigenschaft, daß das Gebiet $L, t(L)$ einen vorgegebenen Punkt enthält. Nach Kerékjártó [Acta Sci. Math., Szeged 4, 86—102 (1928)] kann man diesen Satz und den Poincaré-Birkhoffschen Satz durch eine gemeinsame Konstruktion beweisen. Verf. formuliert in topologisch-invarianter Weise die diesbezüglichen Resultate, die von Brouwer, Kerékjártó und von ihm erhalten wurden [Abh. math. Sem. Hansische Univ. 14, 1—21 (1941); dies. Zbl. 25, 92], und die insbesondere bei der Behandlung des verallgemeinerten Translationssatzes von Nutzen sein können. Fáy (Paris).

Scorza-Dragoni, Giuseppe: Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate e sua maggiore determinazione. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 16, 86—158 (1947).

Bei einer topologischen, fixpunktfreien, indikatrixerhaltenden Abbildung t der euklidischen Ebene auf sich versteht man bekanntlich unter einem Translationsbogen λ einen einfachen Bogen (d. i. topologisches Bild einer Strecke) mit den Endpunkten A und $B = t(A)$, der sonst mit seinem Bild $t(\lambda)$ nichts gemein hat, für den also $\lambda \cdot t(\lambda) = B$ gilt. Wie schon Brouwer gezeigt hat, bildet ein Translationsbogen λ zusammen mit allen seinen Bildern $t^k(\lambda)$, $k \geq 0$, eine (sich nicht überschneidende) Bahnkurve $\sigma(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k(\lambda)$, die topologisches Bild einer Geraden ist. $\sigma(\lambda)$ bestimmt genau zwei „anliegende“ Gebiete, deren Punkte sich durch einen einfachen Bogen mit der Bahnkurve verbinden lassen, von dem nur ein Endpunkt und sonst nichts auf der Bahnkurve liegt; $G(\lambda)$ bezeichne eines dieser Gebiete. — Ein einfacher Bogen λ mit den Endpunkten A , B wird hingegen Pseudotranslationsbogen mit dem Ursprung A genannt, wenn die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot t^{-1}(A) &= 0, & \lambda \cdot t(A) &= 0, \\ \lambda \cdot t(B) + \lambda \cdot t^{-1}(B) &\neq 0, & (\lambda - B) \cdot t(\lambda - B) &= 0. \end{aligned}$$

Elementar heißt ein Translationsbogen oder Pseudotranslationsbogen, wenn er aus endlich vielen Strecken besteht, etwa

$$\lambda = Q_0 Q_1 + Q_1 Q_2 + \cdots + Q_{k-1} Q_k,$$

von denen je zwei aufeinanderfolgende senkrecht zueinander sind ($Q_{i-1} Q_i \perp Q_i Q_{i+1}$). — Es erhebt sich die für manche Anwendungen wichtige Frage, ob sich auf jedem elementaren Translationsbogen λ stets ein Punkt finden läßt, etwa $Q_i Q_{i+1}$, von dem aus ein ebenfalls elementarer Translationsbogen φ senkrecht zu $Q_i Q_{i+1}$ in ein bestimmtes anliegendes Gebiet $G(\lambda)$ gezogen werden kann, so daß φ , abgesehen von dem Ausgangspunkt auf λ , ganz in $G(\lambda)$ verläuft. Es werden eine Reihe Aussagen bewiesen, die in jedem Fall das Vorhandensein mindestens eines solchen (inneren) Punktes auf λ garantieren; dabei besteht φ übrigens nur aus höchstens zwei Strecken, wenn nicht sogar die zweite oder schon erste (und dann einzige) Strecke von φ zu einem ganz in $G(\lambda)$ verlaufenden Halbstrahl ausgezogen werden kann, ohne daß das so erweiterte φ mit $t(\varphi)$ etwas gemein hat. Sperner (Bonn).

Scorza-Dragoni, G.: A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 470—474 (1947).

Scorza-Dragoni, G.: A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: proposizioni preliminari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 3, 474—478 (1947).

Scorza-Dragoni, G.: A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: dimostrazione nel caso di vertici di prima categoria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 50—53 (1948).

Scorza-Dragoni, G.: A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: compimento della dimostrazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 180—183 (1948).

In diesen vier zusammengehörigen Noten wird die in der vorstehend besprochenen Arbeit des gleichen Verf. aufgeworfene Frage erneut behandelt und etwas einfacher beantwortet. Die erste der vier Noten enthält die grundlegenden Begriffsbildungen und die ausführliche und genaue Formulierung des Resultats; die zweite bringt eine Reihe Hilfssätze; in der dritten Note wird ein besonderer Fall der allgemeinen Frage erledigt, während in der vierten schließlich der allgemeine Satz bewiesen wird. Sperner (Bonn).

Scorza-Dragoni, G.: Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 34—37 (1947).

Die Note ist ein zusammenfassender Bericht über mehrere Arbeiten des Verf. Gegenstand der Untersuchungen sind spezielle Translationsbögen (die nur aus einer Strecke oder zwei zueinander orthogonalen Strecken bestehen) bei einer topologischen, fixpunktfreien, indikatrixerhaltenden Abbildung der euklidischen Ebene auf sich. Ziel ist eine besondere Klasseneinteilung gewisser Mengen solcher Translationsbögen, die in zwei Fällen gesichert wird, nämlich dann, wenn es sich um die Menge aller Translationsbögen handelt, die entweder einer Strecke oder einem Rechteck angehören. Sperner (Bonn).

Dolcher, Mario: Due teoremi sull' esistenza di punti uniti nelle trasformazioni piane continue. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 97—101 (1948).

Sia C^* una curva semplice e chiusa contenuta nel piano π ; \bar{C} l'insieme dei punti di C^* e dei punti di π separati dall'infinito per mezzo di C^* ; Φ una trasformazione univoca e continua che muti \bar{C} in un insieme, $\Phi(\bar{C})$, di π . Allora, se l'immagine $\Phi(C^*)$ di C^* non ha punti interni a \bar{C} e se l'ordine dei punti interni di \bar{C} rispetto a $\Phi(C^*)$ è diverso da zero, Φ ammette almeno un punto unito. Il teorema si può estendere agli spazi reali ed euclidei a più dimensioni. G. Scorza-Dragoni.